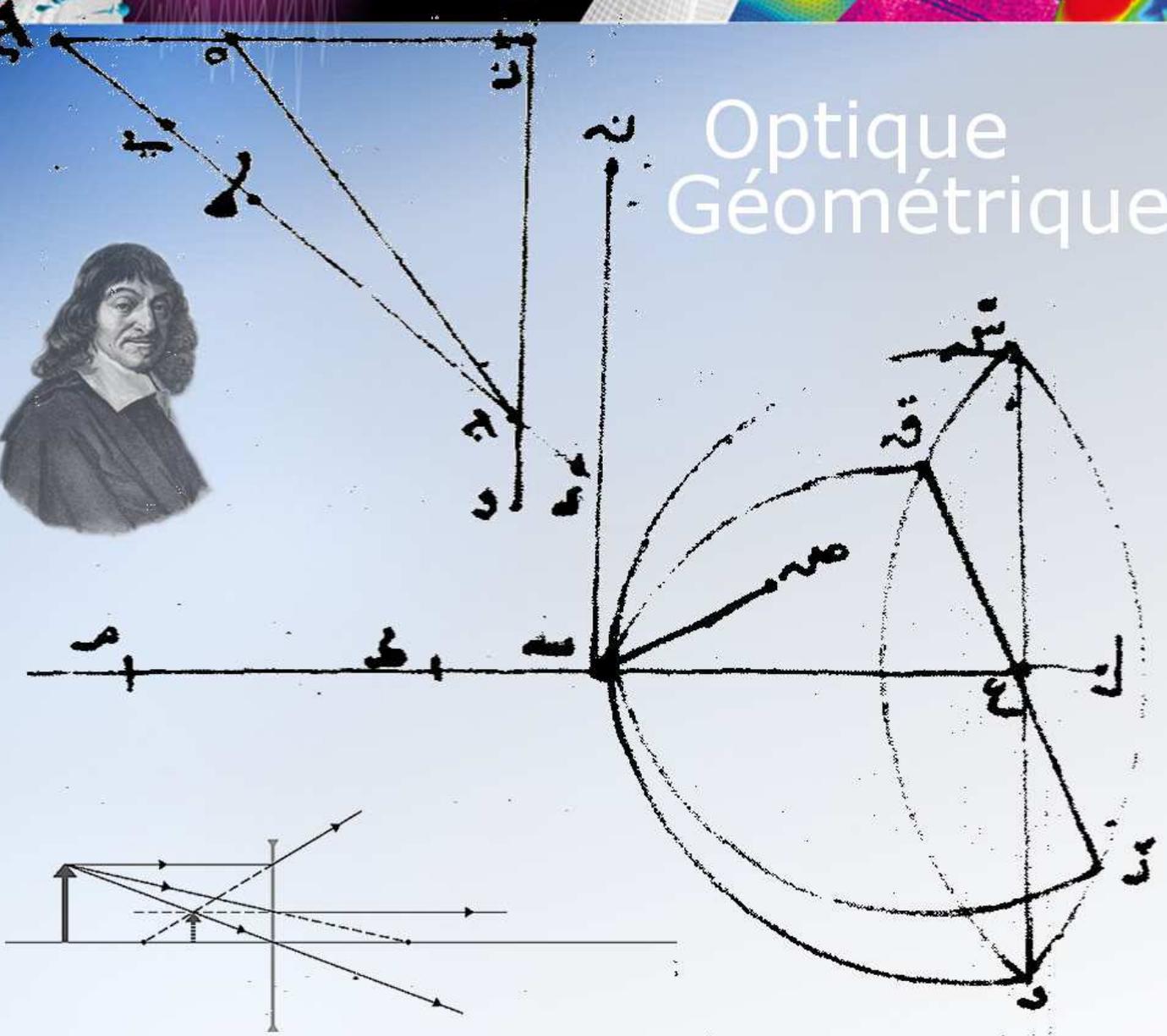




Optique Géométrique



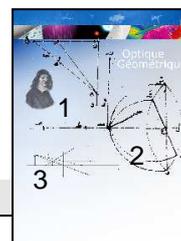
Nicolas RIVIERE

Onera – Département Optique Théorique et Appliquée
2 avenue Edouard Belin – BP 74025 – 31055 Toulouse cedex
+33 562 25 26 24 – riviere@onera.fr

Table des matières

Introduction générale	7
I. Lumière et optique	15
1 Le modèle particulière de la lumière	15
2 La vitesse de la lumière et l'indice de réfraction.....	16
3 Bases de l'optique géométrique	18
II. Principes fondamentaux de l'optique géométrique	31
1 Propagation rectiligne de la lumière.....	31
2 Lois de Snell-Descartes	32
3 Principe du retour inverse de la lumière.....	35
4 Construction du rayon réfracté.....	36
III. Stigmatisme et approximation de Gauss	39
1 Source ponctuelle et objet lumineux	39
2 Définition d'un instrument parfait. Stigmatisme.....	39
3 Stigmatisme approché	40
IV. Miroirs sphériques et miroirs plans	43
1 Réflexion vitreuse et réflexion métallique	43
2 Miroir concave et miroir convexe	44
3 Propriétés remarquables des miroirs sphériques	45
4 Recherche de l'image d'un point objet situé sur l'axe du miroir.....	45
5 Notions de foyer et de plan focal.....	47
6 Construction de l'image d'un objet plan	48
7 Formules des miroirs sphériques dans l'approximation de Gauss.....	50
8 Champ d'un miroir sphérique.....	52
9 Miroirs plans	53
V. Miroirs, lentilles et instruments d'optique	55
1 Rappels sur les miroirs	55
2 Les lentilles	56
3 Formation des images.....	59
4 Puissance des lentilles et aberrations.....	62
5 Généralités et principe de quelques instruments d'optique classiques	65
6 Application : la loupe	66
7 Application : le microscope.....	67
8 Application : la lunette astronomique.....	69
Annexe	71
1 Rappels sur la division harmonique	71

Photos de couverture



1. Portrait de René Descartes. Mathématicien, physicien et philosophe français, il est né le 31 mars 1596 à La Haye en Touraine (localité rebaptisée Descartes par la suite) et il est mort à Stockholm dans le palais royal de Suède le 11 février 1650.
2. Dessin d'Ibn Sahl (~940-1000). Il est le premier à mentionner la loi de la réfraction en considérant des triangles rectangles (en haut à gauche) et que le rapport des deux hypoténuses est une constante du système.
3. Notion d'objet et d'image en optique géométrique.

Introduction générale

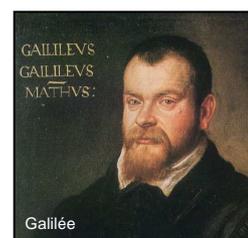
Un peu d'histoire...

Comme pour la plupart des disciplines scientifiques, c'est l'approche Grecque qui a formé l'embryon des notions modernes. Le terme **optique** vient du Grec *τα ὀπτικά*. C'est ainsi, à l'origine, la science de tout ce qui est relatif à l'œil. Les Grecs distinguent l'optique de la dioptrique et de la catoptrique. Nous les appellerions probablement aujourd'hui « science de la vision » pour la première, « science des lentilles » pour la seconde et « science des miroirs » pour la troisième. Les grands noms de l'optique grecque sont **Euclide**, **Héron d'Alexandrie** et **Ptolémée**. Depuis l'Antiquité, l'optique a connu de nombreux développements. Le sens même du mot a varié et, de l'étude de la vision, elle est passée en plusieurs étapes à celui de l'étude de la lumière, avant d'être incorporée récemment dans un *corpus* plus large de la Physique.



Les premiers travaux d'optique pratique concernent la mise au point de lentilles et semblent remonter aux anciens Égyptiens et Babyloniens. Puis, c'est au Moyen Âge, dans les sociétés arabo-musulmanes, qu'on commence à penser le **rayon lumineux** comme indépendant de l'œil humain. Le grand savant Arabe dans ce domaine est **Ibn al-Haytham**, plus connu sous le nom d'**Alhazen**. On a pu le qualifier de « père de l'optique ».

La vision ne s'exclura du champ d'étude de l'optique qu'à la fin de la Renaissance, les précurseurs que sont **Kepler** et **Descartes** mêlant encore les deux notions. Durant la Renaissance, le développement de divers instruments d'optique (lunette astronomique, télescope, microscope) est à la base de véritables révolutions scientifiques. Que l'on pense à la théorie de **Copernic** confirmée par les observations du système solaire par **Galilée**, ou à la découverte des animalcules^① grâce au microscope par de multiples savants dont le Hollandais **Leeuwenhoek** est probablement le plus connu.



Toutefois c'est avec **Huygens** et surtout bien-sûr **Newton** que l'optique connaît des développements théoriques importants : Newton à l'aide de prismes et de lentilles montre que la lumière blanche peut être non seulement diffractée jusqu'à être décomposée en plusieurs lumières de différentes couleurs, mais même recomposée (cercle chromatique de Newton). Il produit la première théorie solide de la couleur et met également en évidence les phénomènes d'interférence (anneaux de Newton). Ses travaux le conduisent à supposer une nature corpusculaire à la lumière. Vers la même époque, Huygens développe les idées de Descartes et postule au contraire la nature ondulatoire du phénomène (*cf.* principe de Huygens), initiant ainsi l'optique ondulatoire.

^① Il ne se dit guère que des Animaux qu'on peut voir seulement à l'aide du microscope dans certains liquides.

Au XIX^e siècle, **Young** à l'aide de ses nouvelles expériences d'interférence et suite à la découverte du phénomène de polarisation repose la question de la nature de la lumière. Mis au courant, **Augustin Fresnel** reprend et perfectionne la théorie de Huygens, et peut rendre compte de la totalité des phénomènes optiques connus. La théorie de Newton est abandonnée et la lumière est conçue comme une vibration d'un milieu très ténu dans lequel baigne l'espace : l'éther. Les découvertes de Hertz et les illustres travaux de Maxwell permettent vers la fin du siècle d'unifier optique et électricité dans un *corpus* plus large, celui de l'onde électromagnétique :

- le domaine optique du spectre lumineux n'est en fait qu'une petite partie du spectre électromagnétique,
 - l'onde lumineuse devient porteuse de l'interaction électrique et magnétique, l'optique devient vectorielle.
- Le phénomène de propagation est décrit par la variation d'un champ de vecteurs.

Le début du XX^e siècle voit à nouveau une révolution dans la physique avec l'apparition presque simultanée de deux théories fondamentales : la **mécanique quantique** et la **relativité**. L'hypothèse des particules de lumière reprend une partie de son ancien lustre, et la nouvelle théorie admet le caractère à la fois ondulatoire et corpusculaire de la lumière. En revanche, on a moins besoin de l'éther dont l'existence est abandonnée. L'optique quantique, dont le laser est probablement la plus éminente application, voit le jour. L'optique étant véritablement au cœur de la physique du XX^e siècle, qui est pour une grande part une physique du rayonnement, ses plus grands noms en sont ceux des physiciens généraux et on pourra citer **Albert Einstein, Max Planck, Louis de Broglie, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Paul Dirac,...**

Les anciens chinois et indiens ont également développé des connaissances non-négligeables en optique. Cependant, leur histoire se présente plutôt comme celle de branches parallèles car, à la différence des savants grecs et arabes, les connaissances en optique des anciens savants indiens et chinois n'ont que très peu influencé le spectaculaire développement de cette science qui s'est effectué en Europe de la Renaissance au début du XX^e siècle. En conséquence, l'impact des découvertes des anciens chinois et indiens sur l'optique contemporaine est faible. La situation monopolistique de l'Europe a évolué peu à peu au cours du dernier siècle, et l'aventure de l'optique, comme d'ailleurs celle des autres sciences, est de nos jours complètement mondialisée.

L'optique sous l'Antiquité

Les premières lentilles optiques furent fabriquées sous l'empire assyrien et sont antérieures à 700 avant JC : il s'agissait de cristaux polis, la plupart du temps de quartz (voir photo ci contre). Des lentilles similaires furent fabriquées par les anciens Egyptiens, les Grecs et les Babyloniens. Les Romains et les Grecs remplissaient des sphères de verre avec de l'eau pour en faire des lentilles (verre ardent) destinées à allumer le feu. L'usage des lunettes pour améliorer la vision ne semble pas avoir été beaucoup pratiqué avant le Moyen Âge.



Lentille Nimrud Assyrie, diamètre 38 mm, vers 750 av JC (British Museum)

Les premières théories en matière d'optique apparurent en Grèce. **Euclide**, au III^e siècle avant JC est l'auteur d'une théorie d'optique géométrique, les *Catoptrica* (Théorie des miroirs), qui voit apparaître la notion de rayon lumineux. À la même époque, **Archimède** a très certainement travaillé dans ce domaine, même si la réalité historique de ses célèbres miroirs embrasant les vaisseaux ennemis est plus douteuse.

Héron d'Alexandrie, au I^{er} siècle de notre ère, écrit également des *Catoptrica*. Au siècle suivant **Ptolémée** rédige une *Optique*. Il y traite des propriétés de la lumière, notamment de la réflexion, de la réfraction, et singulièrement de la réfraction atmosphérique, ainsi que de la couleur. Ses travaux sur la réflexion portent tant sur les miroirs plans que sur les miroirs sphériques. En ce qui concerne la réfraction, s'il ne parvient pas à en définir la loi fondamentale, il montre que l'angle de réfraction croît à mesure que croît l'angle d'incidence et il établit des tables pour l'air et l'eau.

Au sujet de la vision, les anciens étaient partagés. Les **intramissionnistes** (tel **Epicure**) pensent que les objets envoient des émanations (simulacres - εἴδωλα) qui parviennent aux yeux de l'observateur. Parmi eux, les atomistes considéraient que ces émanations étaient des atomes ténus. À l'inverse, les **extramissionnistes** estiment que les yeux projettent un « flux » qui permet la perception de l'objet par une sorte de contact, à l'instar du toucher. Pour d'autres savants Antiques, la vision résulte d'une interaction entre émanations des objets et flux visuel. C'est déjà l'opinion d'**Empédocle** au V^e siècle avant JC. Pour **Ptolémée**, par exemple, la vision résulte d'une interaction entre le « flux visuel » issu des yeux (*visus* en latin) et les émanations caractérisant compacité lumineuse et couleur. S'il ne recèle pas par lui-même de luminosité, l'objet doit être éclairé, stimulé en quelque sorte, pour que l'interaction se produise.



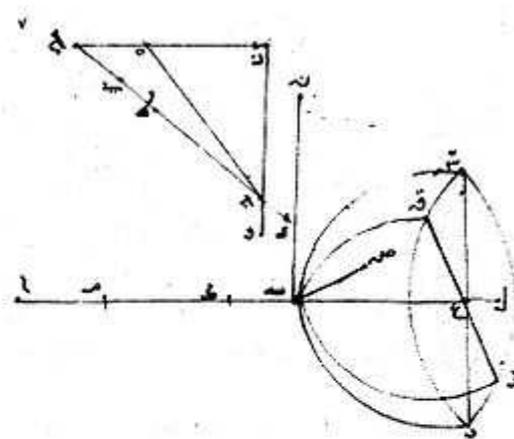
L'*Optique* de **Ptolémée** ne nous est malheureusement pas parfaitement connue, car elle ne nous est parvenue que par l'intermédiaire d'une traduction latine, elle-même issue d'une traduction arabe assez imparfaite et incomplète : le livre I, qui contient la théorie de la vision, est perdu. Son propos est cependant connu par un bref résumé au début du livre II et les grandes lignes de sa théorie de la vision peuvent aussi se déduire d'indications éparpillées dans le texte. Au côté de **Ptolémée**, c'est-à-dire au nombre de ceux qui tentent une synthèse des deux courants anciens, il faut également ranger le médecin Gréco-Romain **Galien** qui fonde son opinion de l'observation anatomique de l'œil. Pour lui le corps émet un flux visuel qui interfère avec l'image de l'objet pour produire la sensation de vision. Ce flux part du nerf optique et se divise en de multiples ramifications à la manière d'un petit filet (*retina*). La fusion des deux flux s'effectue dans le cristallin. Il semble que ce genre d'opinion ait été majoritaire dans l'Antiquité.

La période musulmane

Les premiers travaux d'importances furent ceux d'**Al-Kindi** (vers 801–873) : dans son œuvre *De radiis stellarum* (traduction latine), il développe la théorie que « toute chose dans le monde [...] émet des rayons dans toutes les directions, ce qui remplit le monde entier ».

Puis **Ibn Sahl** (vers 940-1000), mathématicien Persan à la cour de Bagdad, écrit un traité vers 984 sur les miroirs brûlants et les lentilles dans lequel il expose comment les miroirs courbes et les lentilles peuvent focaliser la lumière en un point. On y trouve la première mention de la loi de la réfraction redécouverte plus tard en Europe sous le nom de loi de Snell-Descartes. Il utilisa cette loi pour établir la forme de lentilles et miroirs capables de focaliser la lumière sur un point de l'axe de symétrie.

Mais, dans ce domaine de l'optique, le plus influent des savants Arabes est **Ibn al-Haytham**, plus connu en occident sous son surnom d'**Alhazen**. Il prend pour base les théories antiques, mais parvient à les soumettre à l'arbitrage de la réalité par de nombreuses expériences, souvent très simples mais très ingénieuses, qui lui permettent d'étayer son argumentation. Il conclut en particulier, et pour la première fois sur des bases à peu près bien fondées, qu'il convient de concevoir l'œil comme un récepteur et non un émetteur. Il revient sur le rôle du cristallin, assimile l'œil à une chambre noire, étudie la vision binoculaire,... Son œuvre majeure *Kitâb fi'l Manazîr (Traité d'optique 1015 - 1021)*, traduite en latin par Vitellion constituera la bible de l'optique du monde occidental pendant le bas Moyen-âge et la Renaissance.



لأنه انما تراه عليها سطح مستوي غيره فلا ان هذا السطح يقطع سطح برص
 على نقطة تب فلا بد من ان يقطع احد خطي من ب من غير ذلك
 الخط مستوي الفصل المشرك بين هذا السطح وبين سطح قطع في ر
 خط مستوي فلا ان هذا السطح يباشر مسطو على نقطة تب فخط
 مستوي يقطع في س د على نقطة تب وكذلك خط ب س ر وهذا حال
 فلا يباشر مسطو تب على نقطة تب سطح مستوي غيره سطح ب ن ص

Pendant cette période, le monde verra le développement de la théorie et de l'observation, le développement de l'instrumentation et de la technique (amélioration des lentilles, lunettes, observatoires astronomiques) et la première mention de la loi de la réfraction (sans suite).

Bas Moyen Age et Renaissance

Pendant cette période, on redécouvre les travaux Antiques et arabes (Vitellion) et l'on progresse en optique géométrique. Ce sera également la naissance de la théorie de la perspective (perspective conique). On notera un intérêt accru pour la connaissance de l'œil en tant qu'organe de la vision.

De l'optique géométrique à l'optique ondulatoire...

Dans cette introduction générale au module d'optique géométrique, nous procédons à un rapide rappel historique sur la mise en évidence du caractère ondulatoire de la lumière. C'est l'anglais **Robert Hooke** (1635-1703), contemporain et grand rival d'Isaac Newton, qui étudie en premier les couleurs produites par des couches de matière très minces, telles que les parois d'une bulle de savon ou de deux lames de verre mince pressées l'une contre l'autre. Il tente de les expliquer en postulant une nature ondulatoire de la lumière.

Parallèlement aux travaux menés par Hooke, le père jésuite italien **Francesco Maria Grimaldi** (1618-1663) découvre un nouveau mode de propagation de la lumière, qu'il nomme « diffraction ». En envoyant un filet lumineux sur un minuscule objet ou à travers un trou étroit, il observe que l'ombre projetée n'est pas nette, comme le laisserait supposer une propagation rectiligne de la lumière, mais bordée d'un halo de couleurs. Il en déduit très justement que certains rayons doivent être déviés ou « diffractés » : la lumière contourne l'obstacle, comme un cours d'eau contourne un rocher pour poursuivre son chemin. Or, les vagues de l'eau ont manifestement une nature ondulatoire. Pourquoi n'en serait-il pas de même de la lumière ?



C'est le physicien hollandais **Christiaan Huygens** (1629-1665) qui formule la première théorie ondulatoire de la lumière. Il pense que la lumière se propage dans l'espace comme une onde engendrée par une pierre qu'on jette dans un étang se propage à la surface de l'eau. Le substrat matériel qui permet aux ondes lumineuses de se propager dans l'espace est, selon Huygens, une substance subtile, mystérieuse et impalpable, qui remplit l'espace, un fluide hypothétique, impondérable et élastique que les Anciens appelaient « éther ». Mais comment naît une onde lumineuse ? D'après Huygens, une source lumineuse est composée d'innombrables particules qui bougent et vibrent. Celles-ci communiquent aux particules de l'éther adjacentes leurs vibrations qui se propagent sous forme d'ondes sphériques. Grâce à sa théorie ondulatoire, Huygens parvient non seulement à rendre compte des lois de la réflexion et de la réfraction, mais aussi de la diffraction.

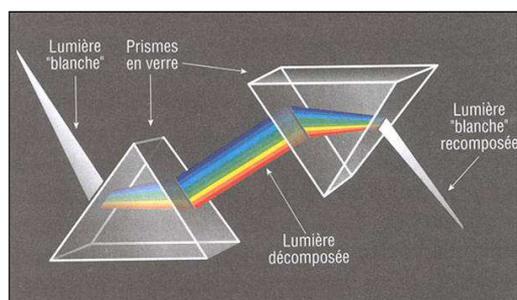
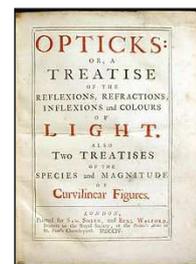


Pourtant, la théorie ondulatoire de Huygens ne parvient pas à s'imposer. Elle rencontre l'opposition farouche du physicien anglais **Isaac Newton** (1642-1727). Son objection principale est que la lumière, contrairement au son, est incapable de contourner un obstacle. Si la lumière était une onde comme le son, nous devrions être capables de la voir aussi bien que nous percevons le son malgré l'obstacle.



Newton a une vue mécaniste de l'Univers. Toutes ses composantes, petites ou grandes, sont constituées de particules en mouvement, obéissant aux lois de la mécanique. Ainsi, pour le physicien, un rayon visuel est une succession de corpuscules qui se suivent sur cette ligne droite.

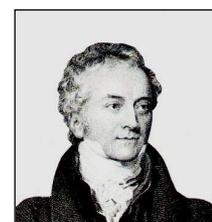
Les expériences de Newton sur la lumière comptent parmi les plus élégantes et les plus fondamentales de la physique. A l'aide d'un prisme en verre, solide transparent en forme de pyramide et à section triangulaire, il décompose la lumière solaire de couleur blanche en ce festival de couleurs qu'on voit dans un arc-en-ciel. Il remarque que la séquence des couleurs est toujours la même : rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo et violet. Comment la lumière blanche peut-elle ainsi se doter de couleurs ? Soit les couleurs sont conférées à la lumière blanche par le prisme quand elle le traverse, soit la lumière blanche contient déjà en elle toutes les couleurs de l'arc-en-ciel, la seule fonction du prisme étant de les séparer. Newton rejette la première hypothèse.



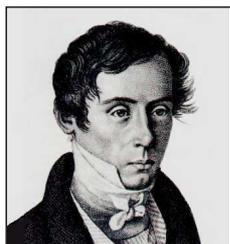
Pour en avoir le cœur net, il fait passer la lumière décomposée par le premier prisme à travers un second prisme identique au premier mais disposé à l'envers. La lumière qui en sort est redevenue blanche. La lumière blanche est donc bien la somme de sept couleurs.

Pour rendre compte de ces résultats dans le cadre d'une théorie corpusculaire, Newton s'inspire des concepts introduits dans la théorie de la gravitation universelle. Il explique les sept couleurs fondamentales en postulant des particules de sept tailles différentes, et fait intervenir des forces d'attraction et de répulsion qui poussent et tirent les particules de lumière qui, sinon, se propageraient en ligne droite. Ainsi, un prisme dévie plus la lumière bleue que la lumière rouge parce que la force attractive qu'il exerce sur la première est plus grande que celle qu'il exerce sur la seconde. Quant aux rayons diffractés de Grimaldi, Newton invoque une force répulsive qui pousse les particules de lumière dans l'ombre géométrique de l'objet.

Les idées de Newton sur l'optique font autorité pendant tout le XVIII^e siècle. Pourtant, la théorie ondulatoire a toujours ses partisans, notamment le physicien anglais **Thomas Young** (1773-1829). Celui-ci s'intéresse en particulier au phénomène de diffraction découvert par le père Grimaldi. Il a bien observé que si l'on perce une petite fente dans la paroi d'une chambre noire, le faisceau lumineux qui y entre se diffracte, éclairant d'un halo d'intensité plus faible une zone étendue. En 1801, pour examiner le résultat de la superposition de deux halos de lumière, le physicien a l'idée de percer non plus une seule fente, mais deux, proches l'une de l'autre. Chacune va être à l'origine d'une zone de lumière étendue. Young place un écran derrière les deux fentes pour examiner la région où les deux halos de lumière se superposent. Ce qu'il découvre le stupéfie. Si la zone de superposition contient bien des bandes plus brillantes, celles-ci alternent avec des bandes sombres, dépourvues de toute luminosité. Young les nomme « franges d'interférence ». Autrement-dit, en certains endroits de l'écran, ajouter de la lumière à la lumière donne de l'obscurité ! Comment cela est-il possible ? Young réalise une description purement corpusculaire de la lumière. Il ne pourra jamais rendre compte de ce phénomène. Ajouter des particules de lumière à d'autres particules de lumière ne peut produire qu'un plus grand nombre de particules, donc créer une région plus éclairée. Par contre, si la lumière est une onde avec des crêtes et des creux comme ceux d'une vague à la surface de l'océan, le phénomène peut s'expliquer. Si les deux ondes arrivent en phase à un point de l'écran, elles s'ajoutent et l'écran est plus lumineux en ce point ; si elles sont déphasées, elles s'annulent et l'écran est obscur en ce point.



Le jeune polytechnicien français **Augustin Fresnel** (1788-1827) ignorait tout du travail de Young et pourtant, il redécouvrit toutes les conclusions du physicien anglais. Fresnel réussit à décrire le principe d'interférence dans



un langage mathématique qui lui permet de réfuter l'objection majeure de Newton à la théorie ondulatoire. Si la lumière se comportait comme une onde, elle devrait pouvoir contourner un obstacle, de la même façon que le fait le son. Fresnel démontre que la quantité de lumière qui contourne un obstacle dépend de sa longueur d'onde, la distance entre deux crêtes successives. Plus la longueur d'onde est petite, plus cette quantité est réduite. Or la longueur d'onde de la lumière est un million de fois plus faible que celle des ondes sonores. Il y a donc une quasi-annulation des ondes lumineuses.

Certains phénomènes lumineux évoqués précédemment sont interprétés en tenant compte de la nature de la lumière. Une avancée capitale dans la compréhension de la nature de la lumière se fait par le biais de l'électricité et du magnétisme. Deux physiciens anglais, **Michael Faraday** (1791-1867) et **James Maxwell** (1831-1879) démontrent que les ondes de lumière sont des *ondes électromagnétiques* de longueur d'onde donnée. Avant de parler du caractère ondulatoire de la lumière (ceci est prévu dans le module d'optique en deuxième année), nous allons nous intéresser à l'optique géométrique. Ce module introduit le vocabulaire et les notions essentielles à une bonne compréhension des phénomènes physiques mis en jeu lors de l'observation de notre environnement *via* des instruments optiques.

I. Lumière et optique

Cette partie introduit la notion d'optique géométrique. La lumière a toujours intrigué les scientifiques et elle a fait l'objet d'interminables discussions entre les philosophes qui cherchaient à la définir et à en comprendre la perception. Il est important d'en saisir la nature car elle est indispensable à la vie sur Terre. Elle est aussi notre principal canal d'échange d'information avec notre environnement.

1 LE MODELE PARTICULAIRE DE LA LUMIERE

Nous pouvons voir un objet selon l'une des deux manières suivantes. L'objet peut être une source lumineuse comme une ampoule, une flamme ou une étoile, et dans ce cas nous voyons la lumière émise directement par la source. Plus habituellement, nous voyons un objet par la lumière qu'il réfléchit. Dans ce dernier cas, la lumière peut provenir du Soleil, d'appareils lumineux ou d'autres sources. On n'a compris la façon dont les corps *émettent* de la lumière que durant les années 1920. Cependant, on a compris beaucoup plus tôt comment la lumière se réfléchit sur les objets.

Il existe de nombreuses preuves que la lumière voyage en ligne droite dans de nombreuses circonstances :

- une source lumineuse ponctuelle comme le Soleil projette des ombres aux contours très nets,
- le faisceau d'une lampe de poche est rectiligne.

Nous inférons la position des différents objets dans notre environnement en supposant que la lumière qui provient de l'objet atteint notre œil en suivant une ligne droite. Toute notre façon de nous orienter dans le monde physique repose sur cette supposition.

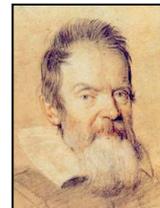
Cette hypothèse raisonnable a conduit au **modèle particulaire** de la lumière. Les parcours rectilignes que la lumière suit s'appellent des **rayons**. Les rayons sont une idéalisation qui sert à représenter un faisceau de lumière infiniment mince. Ainsi, lorsque nous voyons un objet, la lumière qui atteint nos yeux provient de chaque point de l'objet. Quoique chaque point de l'objet émette des rayons dans toutes les directions, seul un petit nombre, ou **faisceau**, de ces rayons pénètre dans les yeux de l'observateur. Si la personne bouge la tête de côté, un autre faisceau de rayons de lumière provenant de chaque point pénètre dans ses yeux.

On peut considérer la lumière comme une onde électromagnétique. Quoique la représentation de la lumière par des rayons de particules ne tienne pas compte de cet aspect de la lumière (nous le verrons l'année prochaine en optique ondulatoire), elle a tout de même permis de rendre compte de plusieurs aspects de la lumière : la réflexion, la réfraction, la formation d'images par les miroirs et les lentilles. Comme ces descriptions supposent des rayons lumineux rectilignes suivant différents angles, on appelle cette matière l'**optique géométrique**.

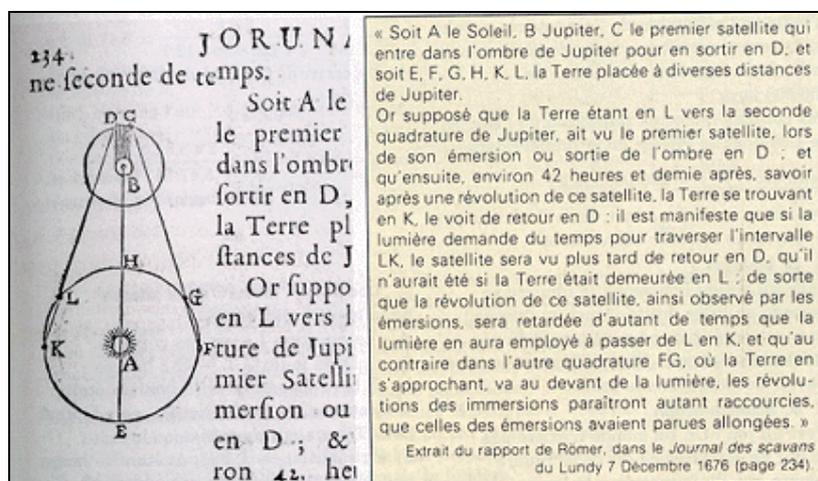
Remarque : On ne tient pas compte des propriétés ondulatoires de la lumière. Si la lumière passe à travers des objets ou dans une ouverture, ces derniers doivent être très grands devant la longueur d'onde de la lumière (pour négliger les phénomènes d'interférence et de diffraction). On ne tient pas compte, non plus, de ce qui arrive à la lumière aux bords des objets.

2 LA VITESSE DE LA LUMIERE ET L'INDICE DE REFRACTION

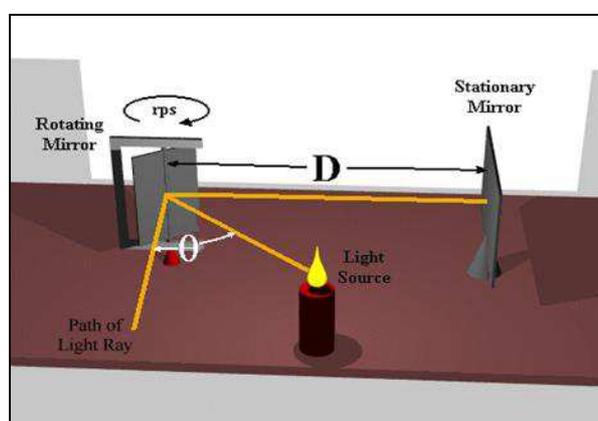
Galilée (Galileo Galilei, né à Pise le 15 février 1564 et mort à Arcetri, près de Florence, le 8 janvier 1642) tenta de mesurer la vitesse de la lumière en essayant de mesurer le temps nécessaire à la lumière pour parcourir une distance connue entre deux sommets de colline. Installé sur un sommet, Galilée demanda à un assistant de s'installer sur un autre sommet et d'enlever le couvercle d'une lampe à l'instant même où il apercevrait la lumière provenant de sa lampe à lui. Après avoir mesuré le temps entre l'allumage de sa lampe et la perception de la lumière provenant de la lampe de son assistant, Galilée conclut que ce temps était si bref qu'il représentait simplement le temps de la réaction humaine et que la vitesse de la lumière devait être extrêmement grande.



C'est l'astronome danois Ole Rømer (1644-1710) qui réussit le premier à démontrer que la vitesse de la lumière était finie. Rømer avait remarqué que la période, méticuleusement mesurée, de l'une des lunes de Jupiter (Io, avec une période moyenne de 42,5 h) variait légèrement et que cette variation dépendait du mouvement relatif de la Terre et de Jupiter. Lorsque la Terre s'éloignait de Jupiter, la période de la Lune devenait un peu plus longue et lorsque la Terre se rapprochait de Jupiter, elle se faisait un peu plus courte. Il attribua cette variation au fait que le temps nécessaire à la lumière pour parcourir la distance Terre-Jupiter augmentait ou diminuait selon que la Terre s'éloignait ou se rapprochait de Jupiter. Rømer en conclut que la vitesse de la lumière, bien que grande, était finie.



Depuis, on a utilisé plusieurs méthodes pour mesurer la vitesse de la lumière. L'une des plus importantes fut celle employée par l'américain Albert Michelson (1852-1931). Il utilisa un miroir rotatif pour mener, de 1880 à 1920, une série d'expériences très précises. Il dirigea un faisceau de lumière provenant d'une source sur l'une des faces d'un miroir rotatif à huit faces. La lumière réfléchi par cette face parcourait une grande distance jusqu'à un miroir stationnaire d'où elle revenait. Lorsque le miroir rotatif tournait à la vitesse appropriée, le faisceau était alors réfléchi par l'une des faces du miroir dans un petit télescope à travers lequel l'expérimentateur observait. A une vitesse de rotation différente, le faisceau était dévié d'un côté de sorte que l'expérimentateur ne pouvait pas l'apercevoir. Michelson put calculer la vitesse de la lumière à partir de la vitesse de rotation requise du miroir rotatif et de la distance connue du miroir stationnaire. En 1920, Michelson installa son miroir rotatif sur le sommet du mont Wilson, dans le sud de la Californie, et le miroir stationnaire sur le mont Baldy (mont San Antonio) à une distance de 35 km. Par la suite, il mesura la vitesse de la lumière dans le vide en utilisant un long tube dans lequel on avait fait le vide.



La valeur acceptée aujourd'hui pour la vitesse de la lumière dans le vide (ou célérité) est :

$$c = 2,997\,924\,574(12) \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Cette valeur comporte un nombre impressionnant de chiffres significatifs. Les divers procédés mis au point pour mesurer la valeur de la vitesse de la lumière rivalisent d'ingéniosité mais nécessitent des dispositifs très coûteux^{②③}. Ces efforts sont toutefois justifiés car ils permettent de tester certaines théories modernes qui font intervenir des constantes fondamentales. Par exemple, la vitesse de la lumière dans le vide est liée à la permittivité et à la perméabilité du vide par l'expression :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

En disposant d'une valeur plus précise de c , les physiciens peuvent élaborer de meilleurs tests des théories modernes de l'électromagnétisme.

^② Mise en place de techniques laser, K.M. Evenson *et al.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1346 (1972)

^③ Description de mesures de la vitesse de la lumière, J.F. Mulligan, Am. Journal of Physics, **44**, 960 (1976)

Lorsqu'il n'est pas nécessaire de réaliser des mesures extrêmement précises, on arrondit la vitesse de la lumière à la valeur $3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse de la lumière est légèrement moindre dans l'air que dans le vide. Dans d'autres milieux matériels transparents (comme le verre ou l'eau), la vitesse de la lumière est toujours plus petite que dans le vide. Dans l'eau, par exemple, elle voyage à environ $(3/4) \cdot c$. Le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à la vitesse de la lumière v dans un milieu matériel donné est appelé l'**indice de réfraction** n de ce milieu matériel :

$$n = \frac{c}{v}$$

Le tableau suivant donne la valeur de l'indice de réfraction pour différents matériaux à une longueur d'onde donnée (ici 589 nm). Par exemple, comme $n = 2,42$ pour le diamant, la vitesse de la lumière dans le diamant sera de : $v = c/n = (3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1})/2,42 = 1,24 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Matériaux	$n = c / v$	Matériaux	$n = c / v$
Air (à TPN)	1,003	Diamant	2,42
Eau	1,33	Verre :	
Alcool éthylique	1,36	Quartz fondu	1,46
Lucite ou plexiglas	1,51	Verre crown	1,52
Chlorure de sodium	1,53	Verre au plomb	1,58

3 BASES DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE

Le champ électromagnétique associé à la propagation des ondes électromagnétiques lumineuses est caractérisé par des fréquences extrêmement hautes (de l'ordre de 10^{14} s^{-1}) ou, ce qui revient au même, à des longueurs d'onde extrêmement petites (de $0,3 \mu\text{m}$ à $0,7 \mu\text{m}$ environ pour la lumière visible). La partie de l'optique correspondant au cas limite où la longueur d'onde est voisine de zéro est l'**optique géométrique**. L'énergie lumineuse s'écoule le long de certaines courbes définies comme les rayons lumineux.

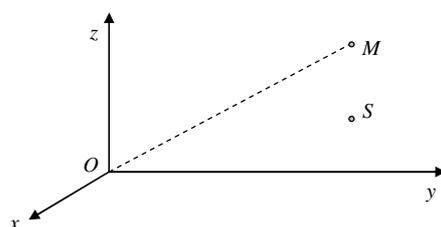
On obtient un pinceau de rayons lumineux en faisant passer la lumière émise par une source de dimensions négligeables à travers une petite ouverture percée dans un écran opaque. La lumière atteignant l'espace derrière l'écran occupe une région dont la limite (*i.e.* le bord du pinceau) apparaît très nette à première vue. Un examen plus approfondi montre cependant que l'intensité lumineuse varie très rapidement et continument en passant de la région correspondant à l'ombre du trou à la région éclairée. Cette variation se manifeste par l'apparition de franges sombres et brillantes appelées **franges de diffraction**. L'étendue de la région dans laquelle ces franges apparaissent est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Aussi longtemps que celle-ci est négligeable devant les dimensions de l'ouverture, on peut parler d'un pinceau lumineux géométriquement défini. Dans la limite où la longueur d'onde est quasiment nulle, on peut dire qu'une ouverture de dimensions infiniment petites définit un pinceau de lumière infiniment fin : **le rayon lumineux**.

L'optique géométrique est donc une approximation de l'électromagnétisme au cas où la pulsation ω de la source sinusoïdale engendrant le champ électromagnétique est infiniment grande ou, ce qui revient au même, au cas où la longueur d'onde du champ électromagnétique se propageant est infiniment petite.

▪ Résolution des équations de Maxwell, équation iconale (ou eikonale)

Dans un premier temps, il est nécessaire de résoudre les équations de Maxwell dans le cas très particulier d'un champ électromagnétique engendré par une source variant sinusoïdalement avec le temps à une fréquence angulaire ω quasiment infinie, et se propageant dans un milieu diélectrique linéaire, isotrope et illimité, caractérisé par la **permittivité diélectrique** ε et la **perméabilité magnétique** du vide μ_0 . Dans le cas où ε est une fonction des coordonnées de l'espace, le milieu est dit **inhomogène**.

Considérons l'espace à trois dimensions repéré par le trièdre $Oxyz$. La source d'onde est localisée en une région très peu étendue de l'espace centrée au point S . Le champ magnétique complexe est calculé au point M repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.



Le champ électromagnétique au point M est noté $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et est solution des équations de Maxwell relatives à un milieu sans charges libres ni courants libres^④ :

$$\mathbf{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{div} \vec{D} = 0 \qquad \mathbf{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{avec } \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \text{ et } \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$$

^④ Rappels sur les notations utilisées :

opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

gradient

$$\mathbf{grad} f = \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

divergence

$$\mathbf{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

rotationnel

$$\mathbf{rot} f = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge f = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le champ électromagnétique cherché varie sinusoidalement avec le temps à la même fréquence angulaire que celle de la source. Cependant, ce n'est pas celui d'une onde plane monochromatique (voir définition en optique ondulatoire) puisque la source n'est pas infiniment éloignée de M . Nous admettons donc que la solution est de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{r}) \cdot \exp(i \cdot (k \cdot S(\vec{r}) - \omega \cdot t))$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{b}(\vec{r}) \cdot \exp(i \cdot (k \cdot S(\vec{r}) - \omega \cdot t))$$

où $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde dans le vide.

Ce vecteur d'onde est considéré comme infiniment grand dans l'approximation envisagée et $S(\vec{r})$ est une fonction réelle de la position du point M . Nous admettons, de plus, que les vecteurs $\vec{e}(\vec{r})$ et $\vec{b}(\vec{r})$ sont des vecteurs réels.

Démonstration

En utilisant la relation mathématique : $\mathbf{rot}(f \cdot \vec{V}) = f \cdot \mathbf{rot} \vec{V} + \mathbf{grad} f \wedge \vec{V}$ où f et \vec{V} sont respectivement l'une une fonction scalaire et l'autre une fonction vectorielle des coordonnées de l'espace. On peut écrire :

$$\mathbf{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = \exp(i \cdot (k \cdot S(\vec{r}) - \omega \cdot t)) \cdot [\mathbf{rot} \vec{e}(\vec{r}) + i \cdot k \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{e}(\vec{r})] = i \cdot \omega \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\mathbf{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \exp(i \cdot (k \cdot S(\vec{r}) - \omega \cdot t)) \cdot [\mathbf{rot} \vec{b}(\vec{r}) + i \cdot k \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{b}(\vec{r})] = -i \cdot \omega \cdot \epsilon(\vec{r}) \cdot \mu_0 \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Donc :

$$\mathbf{rot} \vec{e}(\vec{r}) + i \cdot k \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{e}(\vec{r}) = i \cdot \omega \cdot \vec{b}(\vec{r})$$

$$\mathbf{rot} \vec{b}(\vec{r}) + i \cdot k \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{b}(\vec{r}) = -i \cdot \omega \cdot \epsilon(\vec{r}) \cdot \mu_0 \cdot \vec{e}(\vec{r})$$

Dans l'approximation considérée, k et ω sont des infiniment grands. Les vecteurs d'amplitude $\vec{e}(\vec{r})$ et $\vec{b}(\vec{r})$ du champ électromagnétique varient lentement d'un point de l'espace à l'autre. C'est pourquoi nous admettrons que les vecteurs $\mathbf{rot} \vec{e}(\vec{r})$ et $\mathbf{rot} \vec{b}(\vec{r})$ sont négligeables dans les précédentes expressions devant les termes multipliés par ω et k . Il s'ensuit que :

$$\vec{e}(\vec{r}) = -\frac{1}{c \cdot \mu_0 \cdot \epsilon(\vec{r})} \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{b}(\vec{r}) \quad \text{et} \quad \vec{b}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{e}(\vec{r})$$

Ces deux expressions montrent que $\vec{e}(\vec{r})$ et $\vec{b}(\vec{r})$ sont d'une part perpendiculaires à $\mathbf{grad} S(\vec{r})$ et, d'autre part, perpendiculaires entre eux. De plus, en vertu des propriétés du produit vectoriel, le trièdre trirectangle $\vec{e}(\vec{r})$, $\vec{b}(\vec{r})$, $\mathbf{grad} S(\vec{r})$ est un trièdre direct. En éliminant $\vec{b}(\vec{r})$ dans ces expressions, on obtient :

$$\vec{e}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon(\vec{r}) \cdot \mu_0 \cdot c^2} \cdot [(\mathbf{grad} S(\vec{r}) \wedge \vec{e}(\vec{r})) \wedge \mathbf{grad} S(\vec{r})]$$

ou encore, en utilisant les propriétés du produit vectoriel :

$$\vec{e}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon(\vec{r}) \cdot \mu_0 \cdot c^2} \cdot [(\mathbf{grad} S(\vec{r}))^2 \cdot \vec{e}(\vec{r}) - (\mathbf{grad} S(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{r})) \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r})]$$

Le second terme de cette expression est nul puisque les vecteurs $\vec{e}(\vec{r})$ et $\mathbf{grad} S(\vec{r})$ sont perpendiculaires. Il s'ensuit l'équation iconale suivante :

$$(\mathbf{grad} S(\vec{r}))^2 = \left(\frac{\partial S(\vec{r})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{r})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{r})}{\partial z}\right)^2 = \epsilon(\vec{r}) \cdot \mu_0 \cdot c^2 = n^2(\vec{r})$$



▪ **Rayons lumineux et intensité lumineuse**

On sait que dans le cas d'un milieu transparent et non dispersif, on définit les valeurs moyennes des densités d'énergie électrique et magnétique emmagasinées par les relations :

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \cdot \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, t) \quad \text{et} \quad \langle w_m \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}^*(\vec{r}, t)$$

Dans le cas particulier considéré ici, $\vec{e}(\vec{r})$ et $\vec{b}(\vec{r})$ sont supposés réels. On obtient donc (à partir des écritures précédentes) :

$$\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \cdot \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{r}) = \frac{1}{4\mu_0} \cdot \vec{b}(\vec{r}) \cdot \vec{b}(\vec{r})$$

En définissant la valeur moyenne du **vecteur de Poynting** \vec{P} par la relation :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)]$$

On a :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \cdot c} \cdot [\vec{e}(\vec{r}) \cdot \vec{e}(\vec{r})] \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r}) = \frac{c}{n(\vec{r})} \cdot \langle w \rangle \cdot \frac{\mathbf{grad} S(\vec{r})}{n(\vec{r})}$$

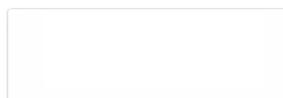
Où :

$$\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle = 2 \cdot \langle w_e \rangle$$

est la densité d'énergie électromagnétique moyenne emmagasinée dans le milieu. On définit le vecteur :

$$\vec{u} = \frac{1}{n(\vec{r})} \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r})$$

en vertu de l'équation iconale comme étant un vecteur unitaire porté par la direction $\mathbf{grad} S(\vec{r})$. Le **vecteur de Poynting moyen** est donné par la relation :



Où $v = c/n(\vec{r})$ est la **vitesse de propagation** du champ électromagnétique dans le milieu. Le vecteur de Poynting moyen se propage donc dans la direction du vecteur normal au front d'onde géométrique. Son module est le produit de la densité d'énergie moyenne emmagasinée par la vitesse de propagation v du champ électromagnétique. La relation précédente est analogue à la relation obtenue dans le cas des ondes planes (voir optique ondulatoire). Il en résulte que dans l'approximation de l'optique géométrique, l'énergie se propage à la même vitesse $c/n(\vec{r})$ que le champ électromagnétique.

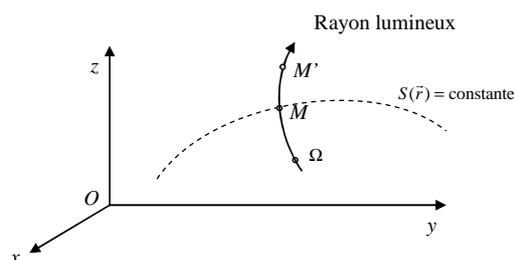
On définit les **rayons lumineux** comme les trajectoires orthogonales aux surfaces d'onde géométriques $S(\vec{r}) = \text{constante}$. Ce sont des courbes orientées dont la direction en chaque point de l'espace coïncide avec celle du vecteur **grad** $S(\vec{r})$. Considérons un rayon lumineux se propageant dans l'espace (voir figure ci-dessous). Un point M du rayon lumineux est repéré par sa position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$$

dans l'espace ou par sa position :

$$\widehat{\Omega}M = s$$

sur la courbe orientée que représente le rayon lumineux, où Ω est un point origine sur le rayon.



Un point M' sur le même rayon lumineux, infiniment voisin de M , est défini par le vecteur élémentaire :

$$MM' = dOM = d\vec{r}$$

dont la valeur algébrique est ds . Il s'ensuit que le vecteur unitaire \vec{u} de la direction du rayon lumineux peut s'écrire :

$$\vec{u} = \frac{dOM}{ds}$$

Dans ces conditions, on peut réécrire l'expression du vecteur \vec{u} sous la forme :

$$n(\vec{r}) \cdot \frac{dOM}{ds} = \mathbf{grad} S(\vec{r})$$

L'**intensité lumineuse** en un point d'un rayon lumineux est définie comme le module du vecteur de Poynting moyen, soit :



La loi de conservation du flux lumineux permet d'écrire : $\text{div} (I \cdot \vec{u}) = 0$

- **Définition du chemin optique**

Considérons deux fronts d'onde infiniment voisins, caractérisés par les équations où C et C' sont des constantes :

$$S(\vec{r}) = C \quad \text{et} \quad S(\vec{r} + d\vec{r}) = S(\vec{r}) + dS = C'$$

Soient M et M' les points d'intersection respectifs d'un même rayon lumineux avec ces deux surfaces (voir figure ci-dessous). En utilisant la définition du vecteur gradient, on peut écrire :

$$dS = MM' \cdot \mathbf{grad} S = d\vec{r} \cdot \mathbf{grad} S = ds \cdot \vec{u} \cdot \mathbf{grad} S = n(\vec{r}) \cdot dS$$



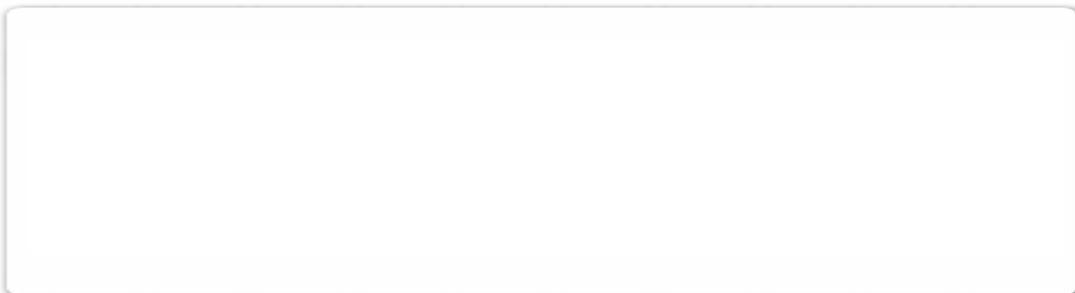
En considérant deux fronts d'onde S_A et S_B non infiniment proches et en notant par M_A et M_B leurs intersections respectives avec le rayon lumineux, le **chemin optique** parcouru par celui-ci est alors défini par :

$$S_B - S_A = \int_A^B n(\vec{r}) \cdot ds$$

où l'intégrale est une intégrale curviligne calculée sur le rayon lumineux. Celui-ci se propageant à la vitesse v , on peut écrire :

$$ds = \frac{c}{n(\vec{r})} \cdot dt$$

où dt est le temps infiniment petit mis par le rayon lumineux pour aller de M à M' .



▪ **Equation du rayon lumineux**

On a déjà écrit que : $dS = MM' \cdot \mathbf{grad} S = d\vec{r} \cdot \mathbf{grad} S = ds \cdot \vec{u} \cdot \mathbf{grad} S = n(\vec{r}) \cdot dS$

On en déduit que : $\frac{dS(\vec{r})}{ds} = \vec{u} \cdot \mathbf{grad} S$

Calculons la quantité vectorielle $\frac{d(\mathbf{grad} S)}{ds}$ en notant \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} les vecteurs unitaires des 3 axes Ox , Oy , Oz .

$$\frac{d(\mathbf{grad} S)}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) \cdot \hat{x} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right) \cdot \hat{y} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right) \cdot \hat{z}$$

Soit :

$$\frac{d(\mathbf{grad} S)}{ds} = \left(\vec{u} \cdot \mathbf{grad} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \cdot \hat{x} + \left(\vec{u} \cdot \mathbf{grad} \frac{\partial S}{\partial y} \right) \cdot \hat{y} + \left(\vec{u} \cdot \mathbf{grad} \frac{\partial S}{\partial z} \right) \cdot \hat{z}$$

Or, on sait que : $\vec{u} = \frac{1}{n(\vec{r})} \cdot \mathbf{grad} S(\vec{r})$

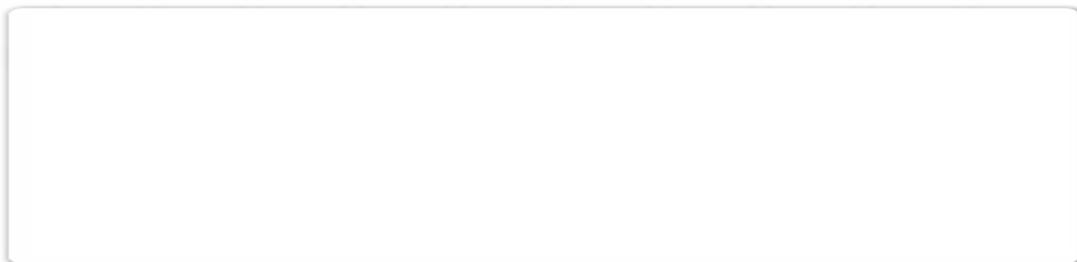
Et que : $\mathbf{grad} S(\vec{r}) \cdot \mathbf{grad} \frac{\partial S}{\partial x_j} = [\mathbf{grad} S(\vec{r})] \cdot \left[\frac{\partial(\mathbf{grad} S(\vec{r}))}{\partial x_j} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\mathbf{grad} S(\vec{r}))^2}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial n^2(\vec{r})}{\partial x_j} = n(\vec{r}) \cdot \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x_j}$

Donc, si $x_j = (x, y, z)$, on a :

$$\frac{d(\mathbf{grad} S)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[n(\vec{r}) \cdot \frac{dOM}{ds} \right] = \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial x} \cdot \hat{x} + \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial y} \cdot \hat{y} + \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial z} \cdot \hat{z}$$

Soit :

$$\frac{d}{ds} \left[n(\vec{r}) \cdot \frac{dOM}{ds} \right] = \mathbf{grad} n(\vec{r})$$



Nous avons établi cette équation dans le cas d'un milieu inhomogène, c'est-à-dire d'un milieu dont la constante diélectrique est dépendante des coordonnées de l'espace. Dans tout ce qui suivra, nous ne considérerons que des milieux homogènes donc caractérisés par un indice de réfraction n constant. Dans ces conditions, $\mathbf{grad} n$ est égal à 0, ce qui signifie que :

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{dOM}{ds} \right] = 0 \quad \text{et après intégration, que} \quad \frac{dOM}{ds} = \vec{u} = \text{constante}$$

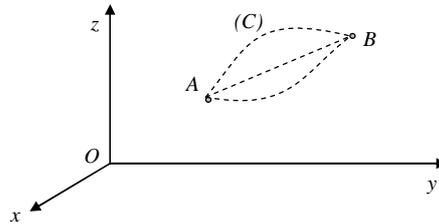
La trajectoire du rayon lumineux, caractérisée en chaque point par une tangente dont la direction est constante, est une **droite**.

Equation du rayon lumineux et principe de Fermat

Nous avons défini les surfaces d'onde géométriques, le rayon lumineux et le chemin optique en résolvant les équations de Maxwell dans le cas particulier où la pulsation ω de la source lumineuse est infiniment grand, c'est-à-dire où la longueur d'onde du champ électromagnétique est un infiniment petit. Nous n'avons pas fait référence au postulat fondamental de l'optique géométrique qu'est le **principe de Fermat**. Après avoir énoncé ledit principe, nous montrerons que l'on retrouve aisément les lois de l'optique géométrique précédemment démontrées.

Enoncé du principe de Fermat

Soient deux points A et B d'un espace à trois dimensions repéré par le trièdre trirectangle $Oxyz$ (voir figure ci-dessous).



On peut tracer entre A et B une infinité de courbes susceptibles de représenter le rayon lumineux. Le temps que mettrait la lumière pour aller de A à B en suivant l'une d'entre elles (soit la courbe C), s'exprime par l'intégrale :

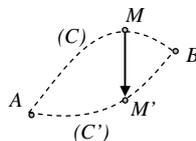
$$(\Delta t_C)_A^B = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \cdot \int_A^B n(\vec{r}) \cdot ds$$

Fermat définit le chemin optique parcouru par la lumière lorsqu'elle va de A à B le long de la courbe C par la relation suivante :

$$[AB]_C = \int_A^B n(\vec{r}) \cdot ds$$

Principe de Fermat :

La signification de la notion d'*extrémal* est la suivante. Calculons l'intégrale précédente sur une courbe C' telle que le point M de la courbe C occupe sur la courbe C' la position M' (voir figure ci-dessous) définie par $\delta M = MM'$.



Le chemin optique suivi par la lumière empruntant la courbe C' est :

$$[AB]_{C'} = \int_A^B n(M') \cdot ds'$$

On dit que l'intégrale est stationnaire si :

$$\delta[AB] = [AB]_{C'} - [AB]_C$$

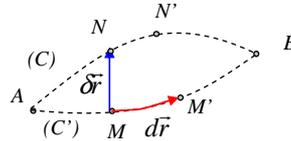
est infiniment petit d'ordre très inférieur à la valeur maximum de δM . Dans ces conditions, $[AB]$ est extrémal et la lumière se propage suivant la courbe C .

Equation du rayon lumineux

On retrouve l'équation du rayon lumineux à partir de la définition du chemin optique. En effet, si C est le chemin suivi par la lumière comme représenté ci-dessous, on a :

$$\delta[AB] = \delta \int_A^B n \cdot ds = \int_A^B \delta(n \cdot ds) = 0$$

avec $\delta(n \cdot ds) = \delta n \cdot ds + n \cdot \delta(ds)$ et $ds = \vec{u} \cdot d\vec{r}$.



En vertu de la définition du vecteur gradient, on peut écrire que :

$$\delta n = \mathbf{grad} n \cdot \delta \vec{r} \quad \text{avec} \quad \delta \vec{r} = \overrightarrow{MN}$$

On sait aussi que $(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ et que $\delta[(ds)^2] = 2 \cdot ds \cdot \delta(ds) = 2 \cdot d\vec{r} \cdot \delta(d\vec{r})$

Donc :

$$\delta(ds) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \delta(d\vec{r}) = \vec{u} \cdot \delta(d\vec{r})$$

A partir de la figure précédente et de considérations géométriques, on obtient :

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} = d\vec{r} + \delta(\vec{r} + d\vec{r})$$

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{NN'} = \delta \vec{r} + d(\vec{r} + \delta \vec{r})$$

Par comparaison de ces deux relations, on en déduit que :

$$\delta(d\vec{r}) = d(\delta \vec{r}) \quad \text{et} \quad \delta(ds) = \vec{u} \cdot d(\delta \vec{r})$$

De plus, on a :

$$d(n\vec{u} \cdot \delta \vec{r}) = n\vec{u} \cdot d(\delta \vec{r}) + \delta \vec{r} \cdot d(n\vec{u})$$

La variation du chemin optique élémentaire $\delta(n \cdot ds)$ entre les courbes C et C' peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned} & ds \cdot \mathbf{grad} n \cdot \delta \vec{r} + n\vec{u} \cdot \delta(d\vec{r}) \\ & ds \cdot \mathbf{grad} n \cdot \delta \vec{r} + n\vec{u} \cdot d(\delta \vec{r}) \\ & ds \cdot \mathbf{grad} n \cdot \delta \vec{r} + d(n\vec{u} \cdot \delta \vec{r}) - \delta \vec{r} \cdot d(n\vec{u}) \\ & [ds \cdot \mathbf{grad} n - d(n\vec{u})] \cdot \delta \vec{r} + d(n\vec{u} \cdot \delta \vec{r}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\delta[AB]_C = \int_A^B d(n\vec{u} \cdot \delta\vec{r}) + \int_A^B [ds \cdot \mathbf{grad} n - d(n\vec{u})] \cdot \delta\vec{r}$$

$$\delta[AB]_C = n\vec{u}_B \cdot \delta\vec{r}_B - n\vec{u}_A \cdot \delta\vec{r}_A + \int_A^B [ds \cdot \mathbf{grad} n - d(n\vec{u})] \cdot \delta\vec{r}$$

$$\delta[AB]_C = 0 \text{ d'après le principe de Fermat}$$

Les courbes C et C' passant par A et B on a alors : $\delta\vec{r}_A = \delta\vec{r}_B = 0$

Pour que $\delta[AB]$ soit nul quel que soit le déplacement arbitraire $\delta\vec{r}$ de chaque point M de la courbe, il est nécessaire que :

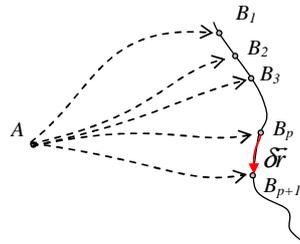
$$ds \cdot \mathbf{grad} n - d(n\vec{u}) = 0$$

On retrouve bien l'équation du rayon lumineux, conséquence directe du principe de Fermat :



Théorème de Malus

La seconde conséquence du principe de Fermat est l'existence de surfaces d'ondes normales aux rayons lumineux. Soit une source ponctuelle A (voir figure suivante) émettant une infinité de rayons lumineux (qui sont des demi-droites uniquement dans le cas des milieux homogènes).



On considère sur chacun de ces rayons les points B_1, B_2, \dots, B_p tels que les chemins optiques $[AB_1], [AB_2], \dots, [AB_p]$ soient les mêmes. Le lieu géométrique des points B_1, B_2, \dots, B_p est une **surface d'onde** (dans le cas d'un milieu homogène, il est évident que les surfaces d'onde sont des sphères). On a, par construction :

$$\delta[AB_p] = [AB_p] - [AB_{p+1}] = 0$$

où $\delta[AB_p]$ a été donné précédemment avec une intégrale nulle par définition de l'équation du rayon lumineux et dans laquelle : $\delta\vec{r}_A = 0$ et $\delta\vec{r}_p = \overrightarrow{B_p B_{p+1}}$. On a alors : $n\vec{u}_p \cdot \delta\vec{r}_p = 0$. Donc, $\delta\vec{r}_p$ est perpendiculaire à \vec{u}_p .

Ceci est vrai quel que soit le rayon lumineux issu de la source A . Il en résulte le théorème de Malus.

Théorème de Malus :

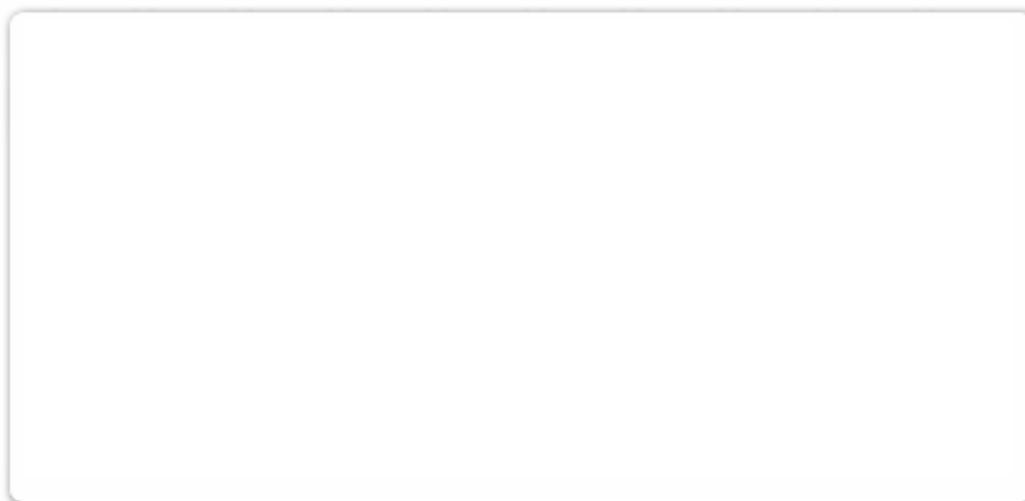
En résolvant les équations de Maxwell dans l'approximation de l'optique géométrique, on définit d'abord les surfaces d'onde puis la notion de rayon lumineux. En admettant le principe de Fermat, on définit d'abord le rayon lumineux et le chemin optique puis on en déduit la notion de surface d'onde.

II. Principes fondamentaux de l'optique géométrique

Tout le long de ce cours, nous considérons que les rayons lumineux se propagent dans des milieux homogènes et transparents. Il s'ensuit, comme nous l'avons démontré dans le chapitre précédent, que le rayon lumineux se propage en ligne droite. Cependant, la démonstration a été effectuée dans le cas où le rayon se propage dans un milieu illimité...

1 PROPAGATION RECTILIGNE DE LA LUMIERE

Dans le premier chapitre, nous avons vu que les rayons lumineux sont définis comme des trajectoires orthogonales aux surfaces d'onde, trajectoire selon lesquelles s'écoule l'énergie lumineuse. Cette définition est très abstraite et la matérialisation d'un rayon lumineux expérimentalement impossible. En revanche, on sait parfaitement, à partir d'une source de lumière, réaliser un ensemble de rayons lumineux, c'est-à-dire un **faisceau lumineux**. Il y a trois types de faisceaux lumineux :



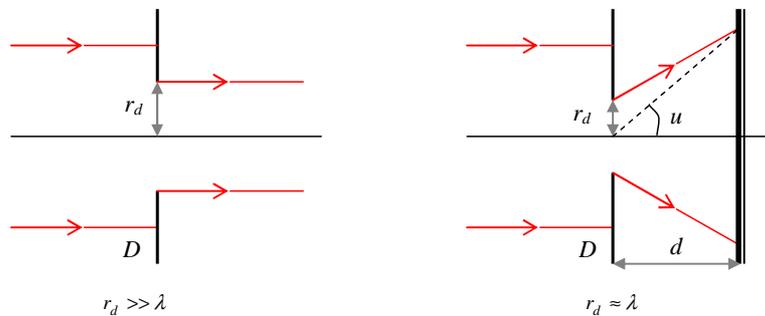
▪ Définition du phénomène de diffraction

Considérons une expérience où un faisceau lumineux de rayons parallèles se propage dans l'air. On interpose sur le trajet de ce faisceau un diaphragme percé d'une ouverture circulaire (voir figure suivante).

Si le rayon r_d de cette ouverture est très grand devant la longueur d'onde de la lumière, le faisceau émergent demeure un faisceau parallèle dont la section droite est un cercle de rayon r_d . Lorsque r_d diminue, la surface de la section du faisceau diminue et celui-ci devient alors un pinceau de lumière. Le faisceau émergent d'un laser matérialise très bien cette notion de pinceau de lumière.

Lorsque r_d devient de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, l'expérience montre que le faisceau s'élargit. La trace du faisceau sur un écran E à grande distance d du diaphragme devient une tache circulaire dont le rayon augmente au fur et à mesure que r_d diminue. Le rayon de cette tache est proportionnel à $\lambda \cdot d / r_d$. C'est le phénomène de **diffraction** qui apparaît dès que l'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable, c'est-à-dire dès que le milieu dans lequel se propage le faisceau lumineux devient limité par des ouvertures dont les dimensions sont telles que l'on ne peut plus négliger la longueur d'onde. C'est à cause de la diffraction que le rayon lumineux ne peut pas être mis expérimentalement en évidence.

Ce phénomène ne sera pas considéré ici (voir l'optique ondulatoire). Nous admettons que les faisceaux lumineux sont constitués de rayons lumineux indépendants les uns des autres, ce qui signifie qu'un rayon lumineux n'a aucune action sur un rayon lumineux infiniment voisin. C'est le **principe de l'indépendance des rayons lumineux**.



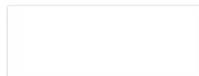
2 LOIS DE SNELL-DESCARTES

▪ Notion d'indice de réfraction

Les milieux transparents dans lesquels se propage la lumière sont caractérisés par leur **indice de réfraction** n par rapport au vide. Nous admettons ici que le rayon lumineux se propage dans le vide à la vitesse $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ et dans un milieu d'indice n à la vitesse :



L'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde. En première approximation, nous admettons que la loi de variation est de la forme suivante où A et B sont des constantes dépendant du milieu :



▪ Notions de dioptre et de miroir

Deux milieux transparents d'indices de réfraction différents (voir figure suivante) sont séparés par une surface Σ que nous supposons non diffusante et non diffractante. Pratiquement, cela signifie que les aspérités présentées par cette surface sont de dimensions très inférieures à la longueur d'onde de la lumière. Une telle surface est un **dioptré**. Nous ne considérerons ici que les dioptrés plans ou les dioptrés sphériques. Dans le cas où le milieu d'indice n_1 est transparent et le milieu d'indice n_2 est absorbant, la surface de séparation est un **miroir**.

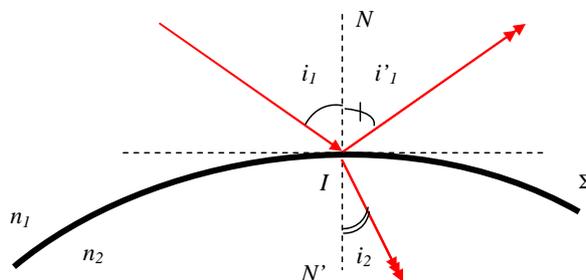


▪ Enoncé des lois de Snell-Descartes

Soit une surface Σ séparant deux milieux transparents caractérisés respectivement par les indices de réfraction n_1 et n_2 . Un rayon lumineux se propageant dans le milieu d'indice n_1 arrive au point I de la surface de séparation des deux milieux (voir figure suivante). Ce rayon incident donne naissance à deux rayons :

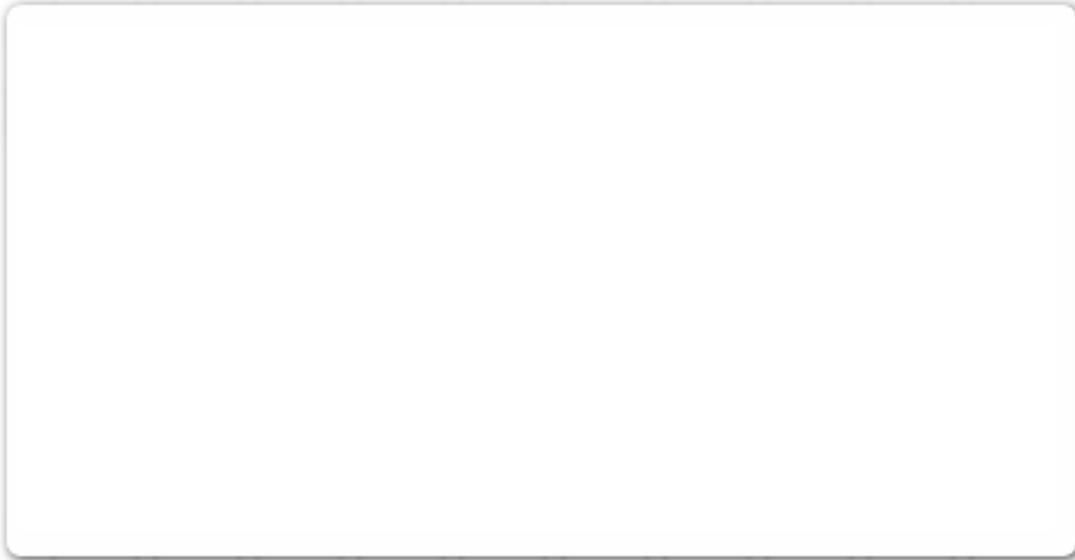
- un **rayon réfléchi** qui est renvoyé dans le milieu d'indice n_1
- un **rayon réfracté** qui se propage dans le milieu d'indice n_2

Ces deux phénomènes sont appelés respectivement **réflexion** et **réfraction**. Les lois les régissant sont les lois de Snell-Descartes.



Définition du plan d'incidence

Soit $N'IN$ la normale à la surface de séparation au point I . Le plan défini par le rayon incident et la normale IN est appelé le **plan d'incidence**. L'angle i_1 que fait le rayon incident avec IN est l'**angle d'incidence**. L'angle i'_1 que fait le rayon réfléchi avec la normale IN est l'**angle de réflexion** et l'angle i_2 que fait le rayon réfracté avec la normale IN est l'**angle de réfraction**.



Ces lois ne sont pas vérifiables directement puisque l'on n'a jamais pu isoler un rayon lumineux. Elles sont admises comme les bases de l'optique géométrique et vérifiées par l'ensemble de leurs conséquences. Si l'angle i_1 est petit, il en est de même pour l'angle i_2 . On retrouve alors les lois de Kepler où : $i_1' = i_1$ et $n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2$.

▪ **Discussion des lois de Snell-Descartes**

L'angle d'incidence i_1 est toujours compris entre 0 et $\pi/2$ et il en est de même de l'angle i_2 . La valeur de ce dernier est donnée par la relation suivante et dépend donc du rapport des indices (n_1/n_2) :

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin i_1$$

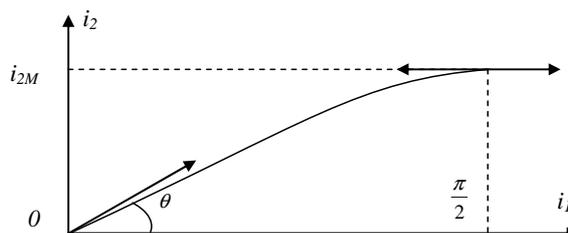
Que se passe-t-il lorsque le second milieu est plus réfringent que le premier ? $n_2 > n_1$

L'expression précédente montre que l'angle i_2 est inférieur à l'angle i_1 . Le rayon réfracté se rapproche donc de la normale à la surface de séparation en pénétrant dans le second milieu. Différentions cette relation.

On a $\cos i_2 \cdot di_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \cos i_1 \cdot di_1$ donc $\frac{di_2}{di_1} = \frac{n_1 \cdot \cos i_1}{n_2 \cdot \cos i_2}$ est positif, inférieur à 1 et s'annule pour $i_1 = \frac{\pi}{2}$.

La courbe suivante représente les variations de i_2 en fonction de i_1 . La tangente à l'origine fait avec l'axe des abscisses l'angle θ défini par :

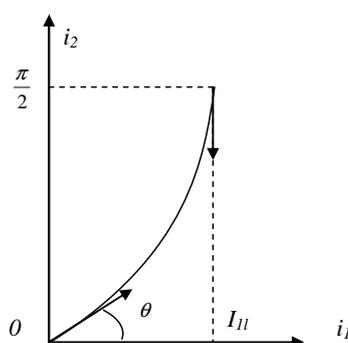
$$\tan \theta = \sin i_{2M} = \frac{n_1}{n_2}$$



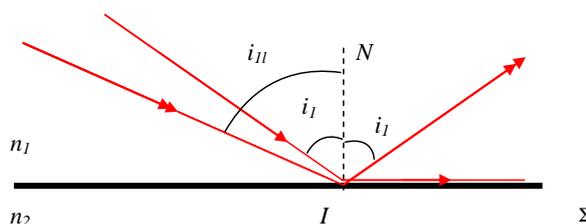
Que se passe-t-il lorsque le second milieu est moins réfringent que le premier ? $n_2 < n_1$

L'angle i_2 est supérieur à l'angle i_1 et le rayon réfracté s'écarte de la normale à la surface de séparation en pénétrant dans le second milieu. La courbe représentant les variations de i_2 en fonction de i_1 est donnée sur la figure suivante. On aura un rayon réfracté dans le milieu d'indice n_2 pour un angle d'incidence inférieur à :

$$i_{1l} = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

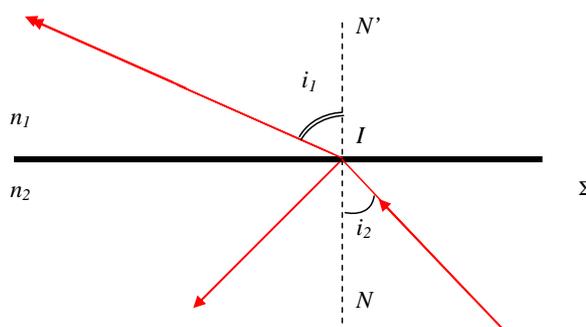


Si i_1 est supérieur à i_{1l} alors $\sin i_2$ est supérieur à 1 et il n'y a plus de rayon réfracté. En effet l'angle i_2 n'est pas défini. Nous admettons sans démonstration que le rayon incident subit alors une réflexion totale à la surface de séparation entre les deux milieux (voir figure suivante).



3 PRINCIPE DU RETOUR INVERSE DE LA LUMIERE

Les formules de Snell-Descartes sont symétriques pour la réflexion et la réfraction. En effet, considérons un rayon lumineux se propageant dans le milieu d'indice n_2 et incident sous l'angle i_2 à la surface de séparation du milieu avec un milieu transparent d'indice n_1 (voir figure ci-dessous). Ce rayon se dédouble sur la surface Σ en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.



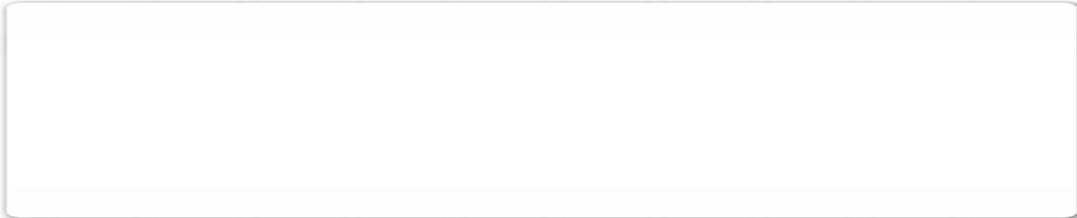
D'après les lois de Snell-Descartes, le rayon réfléchi fait l'angle i_2 avec la normale à la surface de séparation et l'angle i'_1 que fait le rayon réfracté avec NIN' est donné par la relation :

$$n_1 \cdot \sin i'_1 = n_2 \cdot \sin i_2$$

On a donc :

$$i'_1 = i_1$$

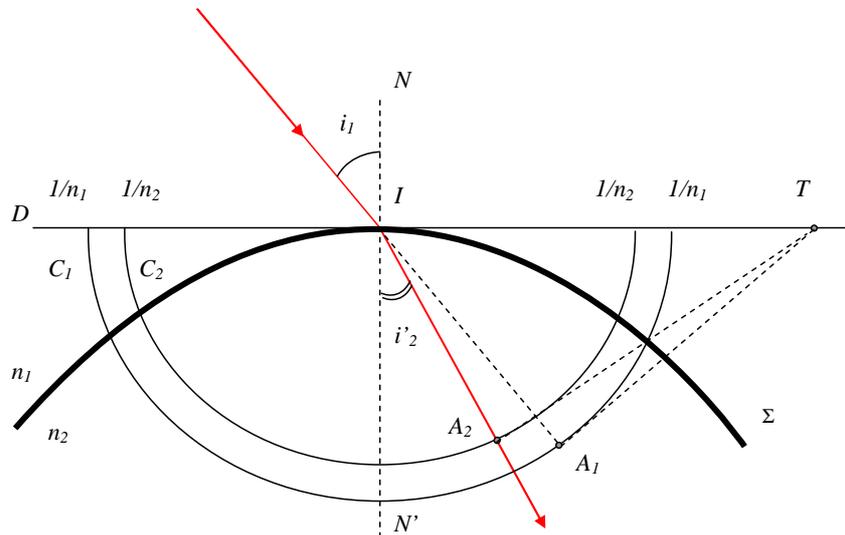
Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas du sens de propagation. Un rayon lumineux se propage suivant une ligne brisée en subissant un certain nombre de réflexions et de réfractions.



4 CONSTRUCTION DU RAYON REFRACTE

- **Construction de Huygens**

Le plan de la figure est le plan d'incidence. Le rayon incident sur la surface de séparation Σ entre les milieux transparents d'indices n_1 et n_2 coupe celle-ci au point I (voir figure suivante).



Soit D la droite intersection du plan tangent en I à Σ et du plan de la figure. On trace dans ce plan les deux demi-cercles de centre I et de rayons respectifs $1/n_1$ (demi-cercle C_1) et $1/n_2$ (demi-cercle C_2). Le rayon incident coupe le demi-cercle C_1 au point A_1 . La tangente en A_1 à C_1 coupe la droite D au point T . On mène de T la tangente au demi-cercle C_2 . Soit A_2 le point d'intersection entre C_2 et celle-ci, et soit i'_2 l'angle formé par les demi-droites IA_2 et IN . En considérant les triangles rectangles IA_1T et IA_2T , on a :

$$IT = \frac{IA_1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right)} = \frac{IA_2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - i'_2\right)}$$

Ou encore :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i'_2$$

Donc, le rayon IA_2 est le rayon réfracté.

■ Construction de Snell

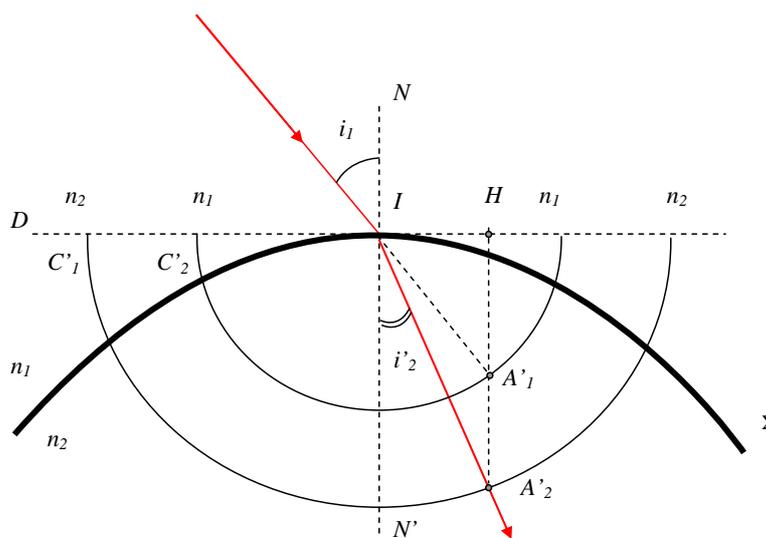
Le plan de la figure est également le plan d'incidence et le rayon incident, la courbe Σ et la droite D sont les mêmes que dans le cas précédent. On trace les deux demi-cercles C'_1 et C'_2 de centre I et de rayons respectifs n_1 et n_2 (voir figure suivante). Le rayon incident coupe le demi-cercle C'_1 en A'_1 . On mène de A'_1 la perpendiculaire à la droite D qui coupe celle-ci en H et le cercle C'_2 en A'_2 . On note i'_2 l'angle entre IN et IA'_2 et on a :

$$IH = IA'_1 \cdot \sin i_1 = IA'_2 \cdot \sin i'_2$$

D'où :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i'_2$$

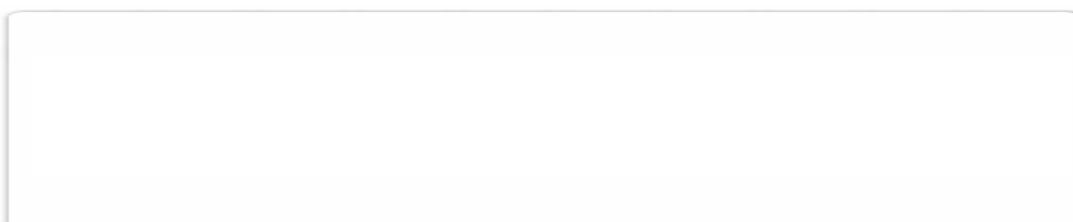
Donc, le rayon IA'_2 est le rayon réfracté.



III. Stigmatisme et approximation de Gauss

Ce chapitre est dédié à l'introduction des notions de source ponctuelle et d'objets lumineux. Nous verrons également quelques définitions telles que celles des instruments parfaits...

1 SOURCE PONCTUELLE ET OBJET LUMINEUX



Dans la suite et sauf mention contraire, la lumière se propagera de gauche à droite, ce qui revient à considérer le rayon lumineux comme une droite orientée.

2 DEFINITION D'UN INSTRUMENT PARFAIT. STIGMATISME

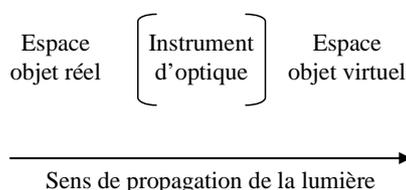
Notion d'image

Stigmatisme

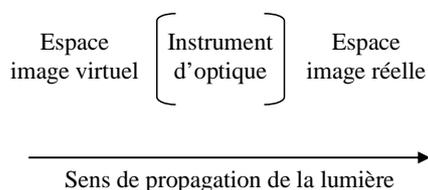
Espace objet et espace image

L'instrument délimite l'espace objet (image) en deux régions, l'une dite **réelle** (virtuelle) et l'autre dite **virtuelle** (réelle). Ces deux régions sont orientées dans le sens de la propagation de la lumière.

Pour l'espace objet, la région qui est traversée par la lumière avant que celle-ci ne pénètre dans l'instrument est l'**espace objet réel**. La région qui suit l'instrument dans le sens de propagation de la lumière est l'**espace objet virtuel**.



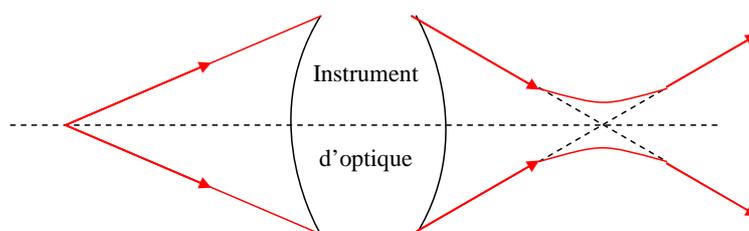
Au contraire, dans l'espace image, la région qui précède l'instrument est **virtuelle** ; celle qui le suit est **réelle**.



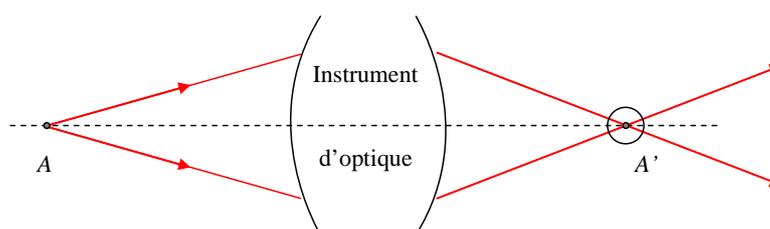
L'objet ou l'image sont dits réels ou virtuels selon la région de l'espace correspondant dans laquelle ils sont situés. Nous verrons plus loin la signification physique d'un objet virtuel. En ce qui concerne la signification physique de la réalité ou de la virtualité d'une image, celle-ci est plus évidente. Un instrument d'optique donne d'un objet une image réelle si celle-ci peut être recueillie sur un écran. Si celle-ci ne peut être recueillie sur un écran, elle est virtuelle.

3 STIGMATISME APPROCHE

Sauf dans le cas très particulier du miroir plan, les systèmes centrés ne sont pas stigmatiques. En effet, considérons un point objet A sur l'axe de l'instrument (voir figure suivante). Dans le cas général, les rayons émergents sont tangents à une surface à deux nappes, dite surface **caustique**, et on ne peut plus définir une image.



Cependant, dans le cas particulier où les rayons issus du point A sont très peu inclinés sur l'axe, (rayons **paraxiaux**, voir figure suivante), les rayons émergent de l'instrument passent tous au voisinage d'un point A' situé sur l'axe. Ce point A' constitue alors l'image de A et on dit qu'il y a **stigmatisme approché**.



Approximation de Gauss

Ces deux conditions constituent ce que l'on appelle l'approximation de Gauss. Elle est fondamentale car c'est le seul cas où l'on puisse considérer le système optique comme parfait. Dans le cas général, l'image d'un point est une tache lumineuse et l'on conçoit aisément que l'image d'un objet constitué d'une infinité de points lumineux juxtaposés n'est plus une reproduction point par point de celui-ci. On dit alors que le système optique présente des **aberrations**.

IV. Miroirs sphériques et miroirs plans

Un miroir sphérique (ou plan) est une surface sphérique (ou plane) réfléchissant la lumière. Le miroir plan est le seul système optique centré possédant la propriété de stigmatisme rigoureux.

1 REFLEXION VITREUSE ET REFLEXION METALLIQUE

Les miroirs sont caractérisés par leur pouvoir réflecteur qui est le rapport de l'énergie lumineuse contenue dans le faisceau lumineux réfléchi à l'énergie lumineuse contenue dans le faisceau lumineux incident. Le pouvoir réflecteur dépend de la nature physique des deux milieux séparés par la surface. D'une façon générale, nous admettrons que le faisceau lumineux incident se propage dans un milieu transparent d'indice n_1 .

Réflexion vitreuse

Réflexion métallique

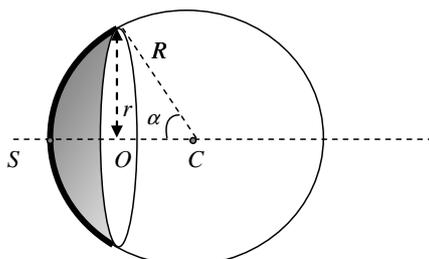
Par la suite, on supposera que le faisceau incident se propage dans l'air ($n_1 = 1$) et que le second milieu est une lame de verre recouverte d'une couche d'argent (ou d'aluminium). Nous sommes dans le cas d'une réflexion métallique, il n'y a donc pas de rayon réfracté.

Argent
Verre

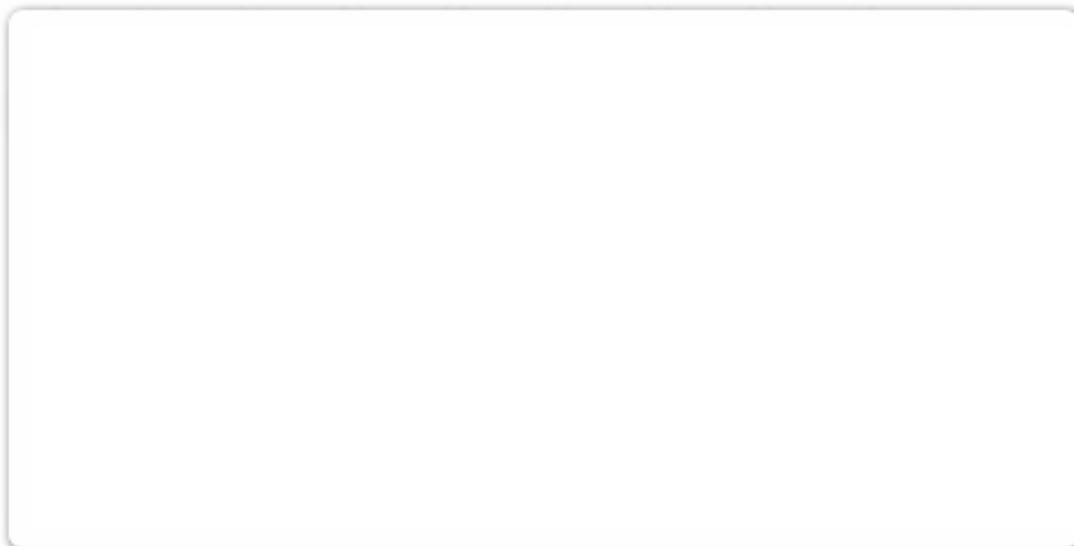
2 MIROIR CONCAVE ET MIROIR CONVEXE

Le miroir est une calotte sphérique dont la base est le cercle de centre O . Le centre du miroir est le centre C de la sphère et le rayon du miroir est le rayon R de la sphère. Le rayon r du cercle de base de la calotte est le rayon d'ouverture et l'angle α est le demi-angle d'ouverture tel que :

$$\tan \alpha = \frac{r}{OC}$$



Toute droite passant par le centre C est un **axe** du miroir. La droite joignant le centre C du miroir et le centre O du cercle de base est l'**axe principal** du miroir. C'est l'axe de symétrie du système optique et son point d'intersection avec la surface réfléchissante est le sommet S du miroir.



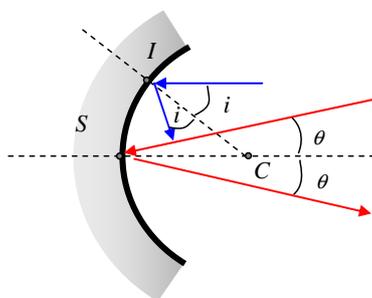
3 PROPRIETES REMARQUABLES DES MIROIRS SPHERIQUES

▪ Centre C

Tout rayon incident passant par le centre est réfléchi sur lui-même quelle que soit son inclinaison. Ceci est une application directe de la loi de Snell-Descartes relative à la réflexion. Si l'on place un point source au centre du miroir, le faisceau réfléchi convergera au même point. Il y a donc stigmatisme pour le point C .

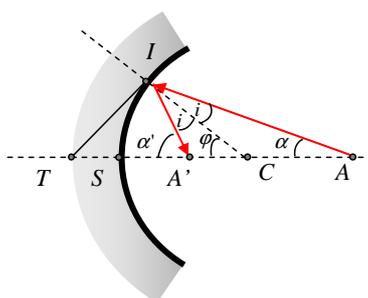
▪ Sommet S et points du miroir

Tout rayon incident passant par le sommet S du miroir se réfléchit suivant le rayon symétrique par rapport à l'axe du miroir et ce, quelle que soit la valeur (petite ou grande) de l'angle θ (voir figure suivante). Il en résulte qu'une source lumineuse placée en S a le point S pour image et que le miroir est stigmatique pour S . Il en est de même pour tous les points I du miroir. En effet, tout rayon incident arrivant au point I se réfléchit suivant le rayon symétrique par rapport à l'axe secondaire CI et ce, quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence i .



4 RECHERCHE DE L'IMAGE D'UN POINT OBJET SITUÉ SUR L'AXE DU MIROIR

Soit A un point lumineux sur l'axe du miroir. Le rayon incident AI se réfléchit en IA' symétrique de IA par rapport à IC (voir figure suivante).



La tangente en I au miroir coupe l'axe en T . Le faisceau des quatre droites est un faisceau harmonique (voir démonstration dans l'annexe « Rappels sur la division harmonique ») et les quatre points A , C , A' et T forment une division harmonique. On a alors :

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CT}$$

Or :

$$CT = \frac{CI}{\cos\varphi} = \frac{CS}{\cos\varphi}$$

Donc :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2 \cdot \cos\varphi}{\overline{CS}} - \frac{1}{\overline{CA}}$$

Et :

$$\overline{CA'} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CS}}{2 \cdot \overline{CA} \cdot \cos\varphi - \overline{CS}}$$

Pour que A' soit l'image de A , il faut qu'un autre rayon AJ se réfléchisse en JA' . En d'autres termes, il faut que $\overline{CA'}$ soit indépendant de la valeur de l'angle φ . L'expression précédente montre que ceci n'est pas vrai dans le cas général. Nous avons déjà évoqué précédemment le cas où le point objet est soit au centre du miroir ($\overline{CA} = 0$), soit au sommet S de celui-ci ($\varphi = 0$ et $\overline{CA} = \overline{CS}$). Dans ces deux cas, le miroir est rigoureusement stigmatique.

▪ Approximation de Gauss

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, les rayons sont très peu inclinés sur l'axe et le point I est alors voisin de S . On peut alors admettre que φ reste petit et que $\cos\varphi$, qui varie peu au voisinage de $\varphi = 0$, reste approximativement égal à 1. Ainsi, on a :

$$\overline{CA'} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CS}}{2 \cdot \overline{CA} - \overline{CS}}$$

Ceci revient à confondre le point T et le sommet du miroir. Les miroirs sphériques sont approximativement stigmatiques pour un point quelconque de l'axe, dans l'approximation de Gauss.

▪ Cas des points voisins du centre

Pour tous les points objets voisins du centre, \overline{CA} est très petit et $\overline{CA} \cdot \cos\varphi$ est négligeable devant \overline{CS} . On peut admettre que $2 \cdot \overline{CA}$ est négligeable devant \overline{CS} et dans ces conditions, on a quel que soit φ :

$$\overline{CA'} = -\overline{CA}$$

L'image est symétrique de l'objet par rapport au centre. Les miroirs sphériques sont approximativement stigmatiques pour les points voisins du centre C . Dans la suite, nous considérerons le cas de l'approximation de Gauss et nous prendrons comme sens positif de propagation, le sens de la lumière émergent du miroir (propagation de gauche à droite).

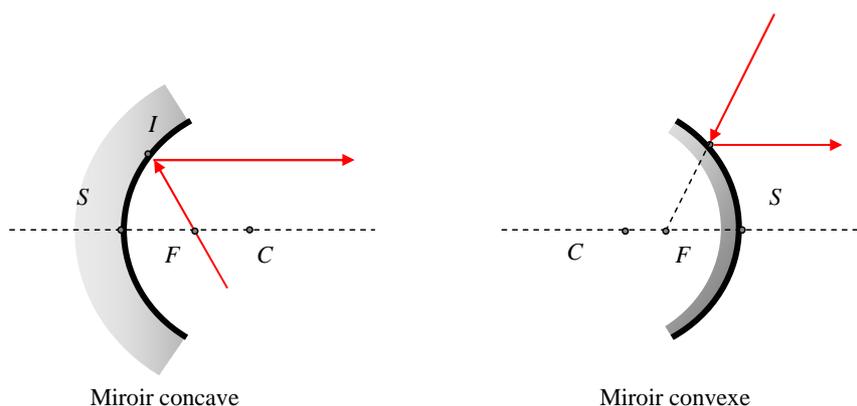
5 NOTIONS DE FOYER ET DE PLAN FOCAL

▪ Foyer image

Dans le cas particulier où le point objet A de l'axe est à l'infini ($1/\overline{CA} = 0$), l'image se forme en un point F' de l'axe dont la position est donnée à partir de l'approximation de Gauss :

$$\overline{CF'} = \frac{\overline{CS}}{2}$$

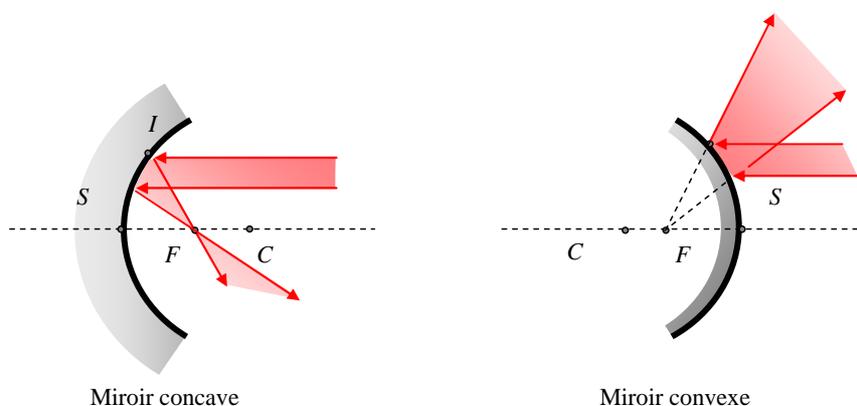
Le foyer image F' est au milieu du segment CS . Il résulte de sa définition que tout rayon incident parallèle à l'axe se réfléchit en passant par le foyer image F' . Celui-ci est réel si le miroir est concave et virtuel si le miroir est convexe.



Dans le cas du miroir sphérique, les foyers objet et image sont confondus. La lettre F désigne ce foyer commun. La distance focale f du miroir est définie par la relation algébrique suivante qui est positive pour un miroir concave et négative pour un miroir convexe :



Un faisceau parallèle à l'axe du miroir est donc réfléchi en un faisceau convergent au point F dans le cas d'un miroir concave et divergent du point F dans le cas d'un miroir convexe.



6 CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UN OBJET PLAN

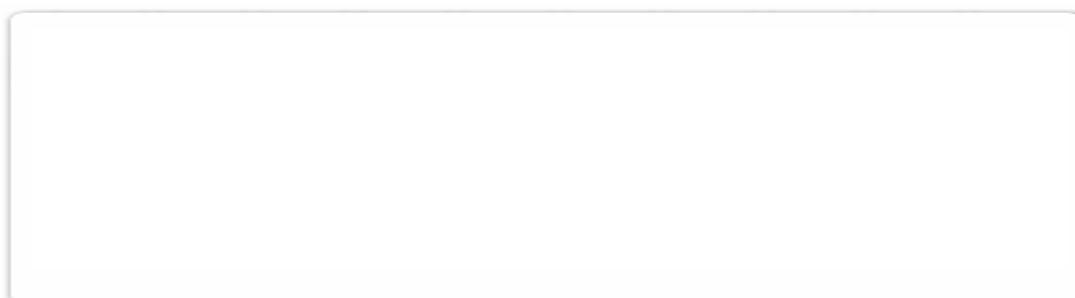
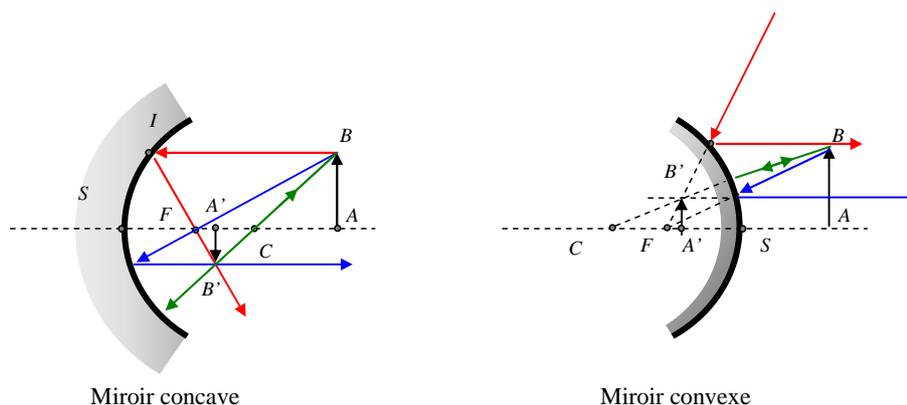
▪ Cas général

Considérons des objets plans très peu étendus et perpendiculaires à l'axe du miroir. Le miroir présente un stigmatisme approché. Les images sont planes et perpendiculaires à l'axe du miroir. On peut utiliser les propriétés du centre optique et des foyers communs pour donner une construction géométrique très simple des images.

Pour obtenir l'image de l'objet AB il suffit de déterminer l'image B' de B . L'image $A'B'$ est perpendiculaire à l'axe du miroir par hypothèse et il en résulte que A' est le pied de la perpendiculaire à l'axe menée de B' . Parmi l'ensemble des rayons issus de B et incidents sur le miroir, il y a trois rayons incidents qui donnent naissance à un rayon réfléchi que l'on peut aisément tracer (voir figure suivante) :

- Le rayon BCI qui passe par le centre optique et qui se réfléchit sur lui-même en ICB .
- Le rayon BJ parallèle à l'axe du miroir qui se réfléchit en JF , en passant par le foyer image F .
- Le rayon incident BFK qui passe par le foyer objet F et se réfléchit parallèlement à l'axe du miroir.

Ces trois rayons sont concourants au point B' qui est l'image de B . Deux de ces rayons suffisent pour déterminer l'image de B et l'image $A'B'$ de l'objet AB . Si le miroir est concave (voir figure suivante), l'image réelle est renversée et plus petite que l'objet. Pour un miroir convexe, l'image est virtuelle, droite et plus petite que l'objet.

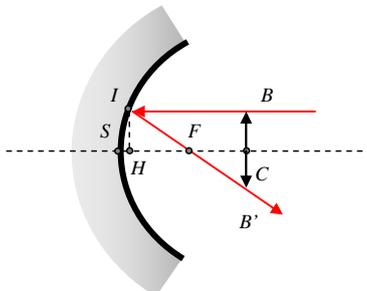


Le grandissement linéaire est une quantité algébrique qui est positive si l'objet et l'image sont de même sens et négative si l'objet et l'image sont de sens contraire.

■ Cas particuliers

1. L'objet est dans le plan de front du centre du miroir

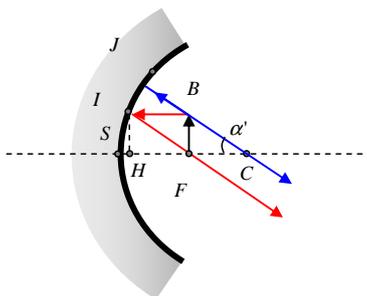
Si A est confondu avec C alors A' l'est aussi. Dans l'approximation de Gauss, on peut admettre que I est si voisin de S que H et S sont pratiquement confondus. Donc, F est le milieu de CH et C le milieu de BB' . L'image est également dans le plan de front du miroir et le grandissement est égal à -1 .



2. L'objet est dans le plan passant par F et perpendiculaire à l'axe du miroir

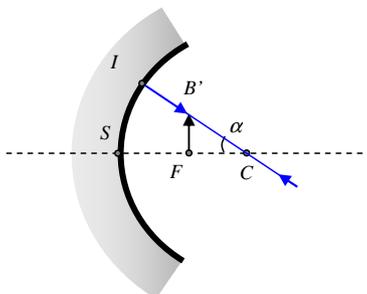
Par définition, ce plan est le plan focal du miroir. Le point A est confondu avec F . Dans le cas de l'approximation de Gauss, F est le milieu de CH et les rayons JC et IF sont parallèles. L'image de B est donc à l'infini. On peut alors caractériser cette image par son diamètre apparent α' défini par :

$$\tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{AB}{f} = \frac{FB}{f}$$

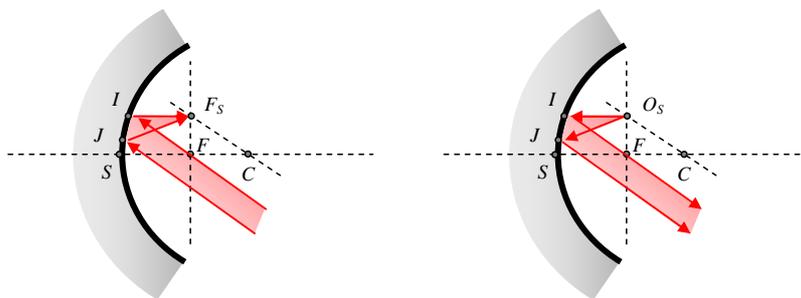


3. L'objet est à l'infini

On caractérise un objet à l'infini par son diamètre apparent α qui est l'angle sous lequel on voit cet objet de n'importe quel point de l'axe. L'image du point A situé à l'infini sur l'axe du miroir est en F . Le rayon issu de B et passant par C est incliné d'un angle α sur l'axe du miroir. Il est réfléchi sur lui-même. L'image de l'objet à l'infini est située dans le plan focal en FB' .



Remarque : un faisceau de rayons parallèles (non parallèles à l'axe du miroir) converge en un point focal nommé **foyer image secondaire**. De la même manière, une source ponctuelle O_F placée en un point du plan focal objet donne naissance après réflexion à un faisceau parallèle incliné d'un angle α sur l'axe du miroir. Ce point est un **foyer objet secondaire** du miroir sphérique.



4. L'objet est dans le plan de front du sommet S

L'image du sommet S est le sommet lui-même. Dans l'approximation de Gauss, A est confondu avec S et B est suffisamment voisin de A pour être à la fois sur le miroir et dans le plan tangent en S à la sphère. Dans ces conditions, l'image de B est B . L'objet AB et son image $A'B'$ sont confondus et le grandissement est égal à 1.

7 FORMULES DES MIROIRS SPHERIQUES DANS L'APPROXIMATION DE GAUSS

Ces formules permettent de déterminer la position et la grandeur de l'image $A'B'$ connaissant la position et la grandeur de l'objet AB . Ces formules sont des formules algébriques qui dépendent du point origine choisi sur l'axe du miroir.

Origine du centre

Origine au sommet

En utilisant l'expression de l'origine au centre, on a $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} + 1 = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CF}}$ soit $\frac{1 + \frac{\overline{FA'}}{\overline{CF}}}{1 + \frac{\overline{FA}}{\overline{CF}}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{CF}}$

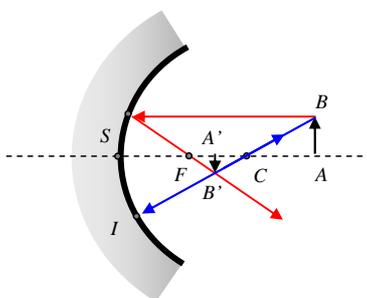
Donc : $1 + \frac{\overline{FA'}}{CF} = \frac{\overline{FA'}}{CF} + \frac{\overline{FA}}{CF} \frac{\overline{FA'}}{CF}$ d'où la formule de Newton ci-dessous.

Origine au foyer (formule de Newton)

On distingue trois formules pour le grandissement telles que :

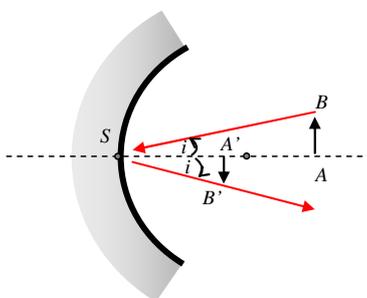
Origine au centre

Cette formule est déduite en appliquant le théorème de Thalès aux triangles CAB et $CA'B'$.



Origine au sommet

En effet, le rayon BS incident sur le miroir en faisant l'angle i avec la normale CS est réfléchi suivant le rayon symétrique SB' . La formule précédente est obtenue en considérant les triangles SAB et $SA'B'$.



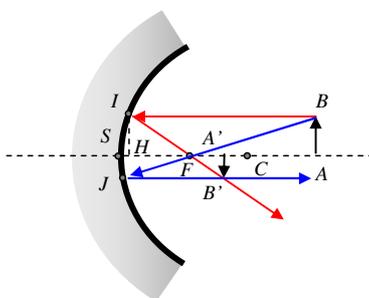
Origine au foyer

En effet, dans l'approximation de Gauss, on peut confondre F et le milieu de CH . Dans ces conditions :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{HI}} \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FH}} \approx \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{FA'}}{\overline{SF}}$$

Or, en utilisant la relation écrite pour l'origine au foyer (formule de Newton), on peut écrire :

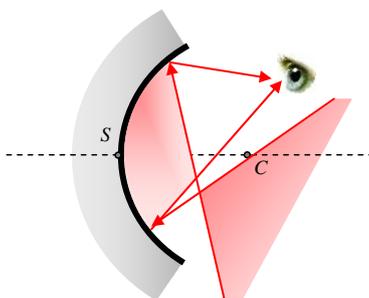
$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{CF}} = -\frac{\overline{FA'}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}} \quad \text{d'où} \quad \gamma = -\frac{\overline{FA'}}{\overline{SF}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$$



Ces relations sont algébriques et indépendantes du sens positif choisi. En général, on choisit comme sens positif le sens de propagation de la lumière réfléchi. Avec cette convention, la distance focale définie algébriquement par $f = \overline{SF}$ est positive pour un miroir concave et négative pour un miroir convexe.

8 CHAMP D'UN MIROIR SPHERIQUE

On appelle champ d'un miroir sphérique, pour une position donnée de l'œil, l'ensemble des points de l'espace qui peuvent être vus par celui-ci. En d'autres termes, c'est le lieu des points qui envoient des rayons pénétrant dans l'œil après réflexion sur le miroir.



9 MIROIRS PLANS

On peut directement déduire les propriétés principales du miroir plan de celles que l'on vient de démontrer pour un miroir sphérique dans le cas de l'approximation de Gauss. Un miroir plan est un miroir sphérique dont le rayon est infini. Il n'y a pas de centre, il n'y a pas de foyer et tous les points du miroir plan sont équivalents au sommet du miroir sphérique.

Image d'un objet

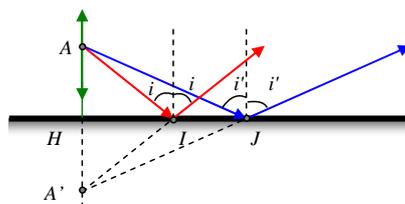
1. Image d'un point

Le point objet A envoie une infinité de rayons qui se réfléchissent sur le miroir en suivant la loi de Snell-Descartes relative à la réflexion. On applique l'expression de l'origine au sommet, en remplaçant le sommet S par le pied H de la perpendiculaire menée de A sur le miroir et en posant $\overline{HC} = 0$. On a donc :

$$\overline{HA'} = -\overline{HA}$$

L'image A' de A donnée par le miroir est le symétrique de A par rapport au plan du miroir. Elle est virtuelle.

La différence essentielle avec le miroir sphérique est que ceci est vrai quel que soit l'inclinaison du rayon incident sur la perpendiculaire au miroir. En effet, quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence i , les rayons réfléchis se rencontrent au point A' . Le miroir plan est donc stigmatique pour tous les points de l'espace.

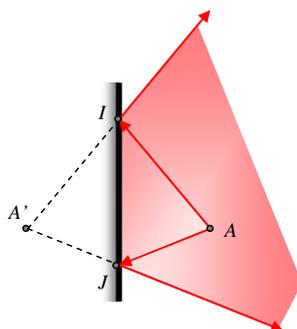


2. Image d'un objet

Il résulte de ce qui précède que l'image d'un objet est symétrique de celui-ci par rapport au plan du miroir. Dans le cas général, elle n'est pas superposable à l'objet.

Marche des rayons d'un faisceau lumineux

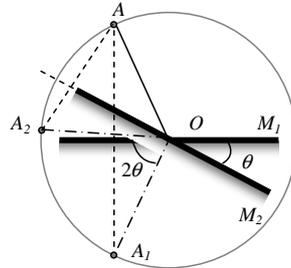
Puisqu'un miroir plan est stigmatique pour tous les points de l'espace, on peut aisément tracer le faisceau réfléchi par un miroir. Soit A un point source duquel est issu un faisceau lumineux. Tous les rayons du faisceau réfléchi passant par l'image virtuelle A' , on peut tracer les limites de celui-ci en joignant le point A' aux points I et J du miroir, points d'intersection des rayons extrêmes du faisceau incident avec le miroir.



▪ Rotation d'un miroir plan

1. Déplacement de l'image

Le miroir M_1 donne du point objet A une image A_1 . Faisons tourner M_1 d'un angle θ autour de l'axe O . Il occupe alors la position M_2 et donne de A l'image A_2 . Les points A , A_1 et A_2 sont sur le cercle de centre O et de rayon OA puisque A_1 et A_2 sont les symétriques de A , respectivement l'un par rapport à M_1 et l'autre par rapport à M_2 .



La droite AA_1 est perpendiculaire à M_1 et la droite AA_2 à M_2 . L'angle $A_1\hat{A}A_2$ est donc égal à θ . L'angle au centre $A_1\hat{O}A_2$ qui intercepte le même arc de cercle est donc égal à 2θ . Lorsqu'un miroir plan subit une rotation d'un angle θ autour d'un axe situé dans son plan, l'image d'un point fixe tourne autour du même axe, et dans le même sens, d'un angle 2θ .

2. Rotation du rayon réfléchi

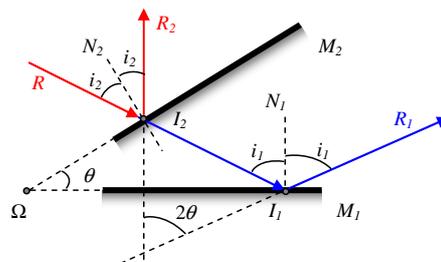
Le miroir dans la position M_1 réfléchit le rayon incident R incliné d'un angle i_1 sur la normale en I_1 à M_1 . Lorsque le miroir occupe la position M_2 déduite de la précédente par une rotation d'angle θ autour d'un axe passant par Ω et perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon réfléchi devient le rayon R_2 incliné de l'angle i_2 sur la normale I_2 au miroir M_2 . L'angle entre les deux normales I_1N_1 et I_2N_2 , respectivement l'une au miroir M_1 et l'autre au miroir M_2 est θ . On a alors :

$$i_2 = i_1 - \theta$$

L'angle entre les rayons R_1 et R_2 est donné par :

$$\alpha = i_1 + \theta - i_2 = 2\theta$$

Lorsqu'un miroir plan subit une rotation d'un angle θ autour d'un axe perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon réfléchi subit une rotation de 2θ autour du même axe et dans le même sens.



V. Miroirs, lentilles et instruments d'optique

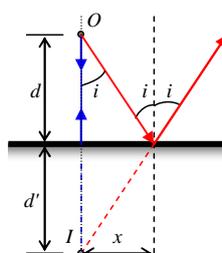
Les appareils photographiques, les microscopes, les télescopes et l'œil sont des instruments d'optique qui font usage de lentilles et dans certains cas de miroirs. Ici, les lentilles auront des dimensions supérieures à la longueur d'onde de la lumière visible : leur fonctionnement peut être étudié sans tenir compte des phénomènes d'interférence ou de diffraction. La nature ondulatoire de la lumière impose une limite à la résolution des instruments d'optique ou à la netteté des images que forment ces instruments. Ce chapitre est en partie constitué par des applications d'instruments optiques simples.

1 RAPPELS SUR LES MIROIRS

Si nous nous plaçons à un mètre d'un miroir plan et que nous regardons dans la direction de ce miroir, nous y voyons un personnage qui paraît se trouver à un mètre derrière la glace et qui nous ressemble trait pour trait, mis à part qu'il s'est coiffé du mauvais côté. La lumière captée par nos yeux paraît provenir d'un point appelé **image** et situé derrière le miroir. Cette image est **virtuelle** plutôt que réelle du fait que la lumière ne passe jamais réellement par l'endroit où elle se forme. Il s'agit d'une image **droite**, dans laquelle le haut et le bas ne sont pas **inversés**.

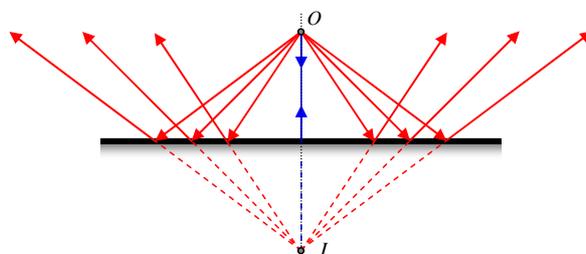
Il est utile de se rendre compte que ces observations sont la conséquence directe de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion. Le raisonnement que nous appliquerons peut également s'appliquer à des situations plus complexes comme, par exemple, la formation d'une image au moyen d'une lentille.

La figure suivante montre deux des nombreux rayons de lumière émis par la source ou **objet** ponctuel placé en O , à une distance d du miroir. Le rayon incident tombant suivant la normale est réfléchi sur lui-même et paraît provenir d'un point situé sur la normale derrière le miroir. Pour une incidence i , le rayon réfléchi prend une direction formant avec la normale un angle i égal à l'angle d'incidence et paraît provenir d'un point situé sur son prolongement derrière le miroir. Les prolongements des deux rayons réfléchis se rencontrent au point I qui définit ainsi la position de l'image.

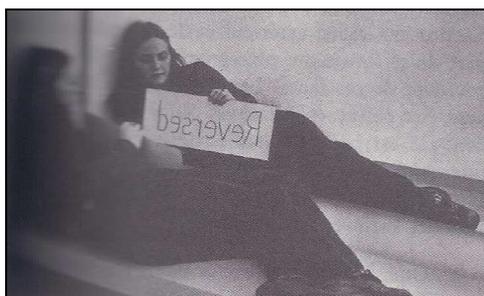


Les deux triangles rectangles tracés en couleur sur la figure ont un côté commun en x et un angle égal à i . Ces triangles sont donc égaux et tous leurs angles et côtés sont égaux. Ceci implique que **la distance d' entre le miroir et l'image est identique à la distance d entre le miroir et l'objet.**

Lorsqu'un objet complexe éclairé est placé devant un miroir, chacun de ces points a son image juste en face (voir figure suivante).



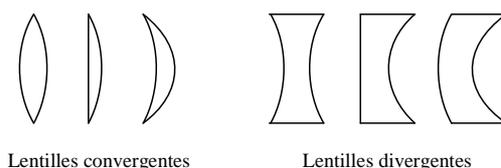
On dit parfois que le miroir inverse la gauche et la droite mais n'inverse pas le haut et le bas. C'est formulation n'est pas réellement judicieuse, comme on peut s'en rendre compte lorsqu'on se couche de côté devant un miroir (voir ci-dessous). Nous percevons alors une image inversée de haut en bas et non inversée suivant l'horizontale !



2 LES LENTILLES

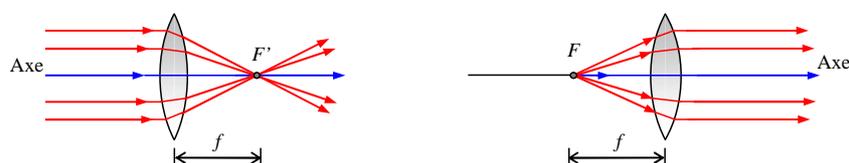
Une lentille est une pièce taillée dans un matériau transparent conformée pour focaliser les rayons lumineux de manière à créer une image. Les lentilles que l'on trouve dans les instruments d'optique construits par l'homme sont faites le plus souvent de verre ou de matière plastique, alors que la lentille qui équipe l'œil est constituée d'une membrane remplie d'un liquide transparent. Ici, nous ne décrivons que les lentilles sphériques minces. Elles sont limitées par deux surfaces sphériques ou une surface sphérique et une surface plane. Leur épaisseur est faible en regard des rayons de courbure.

On considère deux catégories de lentilles : les lentilles **convergentes** et les lentilles **divergentes**. Une lentille convergente s'amincit du centre vers le bord et une lentille divergente s'épaissit vers le bord. Cette définition suppose que la lentille soit taillée dans un matériau d'indice de réfraction plus élevé que celui du milieu extérieur.

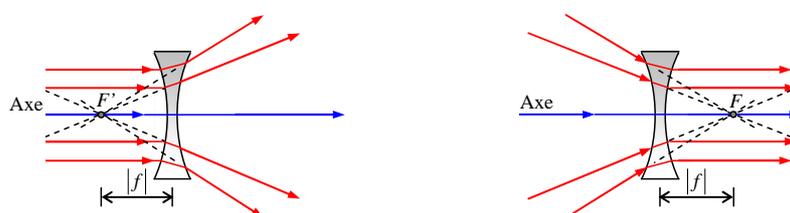


Une lentille convergente dévie la lumière dans la direction de son **axe optique**, c'est-à-dire la droite passant par les deux centres de courbure. Ainsi, un faisceau de rayons parallèles à cet axe converge en un même point (voir figure ci-dessous). Une lentille convergente peut par exemple produire un point lumineux suffisamment intense pour calciner du papier. Une lentille divergente dévie les rayons lumineux de manière qu'ils s'écartent de l'axe.

Considérons un objet très distant placé sur l'axe même de la lentille. Les rayons émis par cet objet arrivent pratiquement parallèles. Une lentille convergente déviara ces rayons parallèles pour qu'ils se rencontrent ou forment une image au **foyer** F' de l'autre côté de la lentille (voir figure suivante).



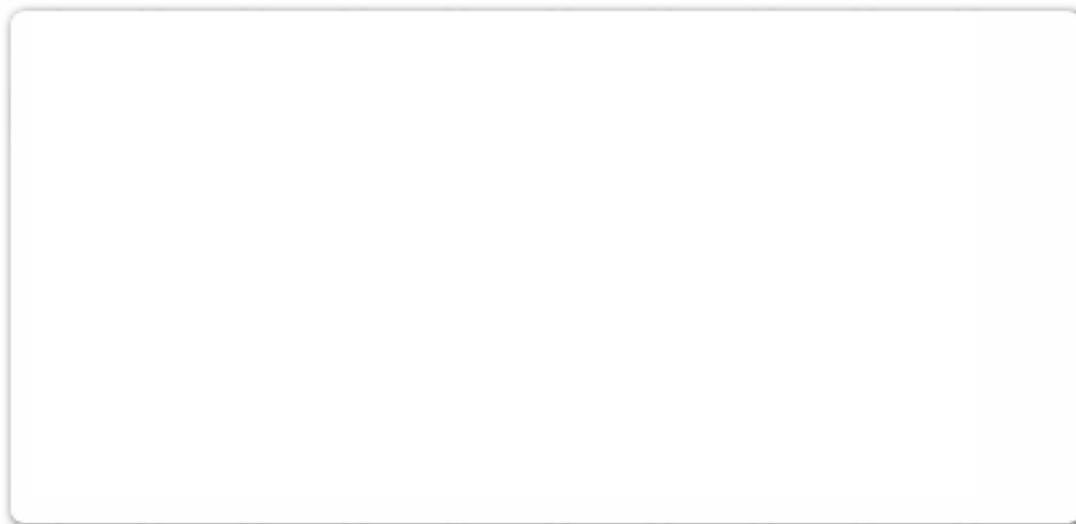
Une lentille divergente les déviara de telle sorte qu'ils **semblent émaner du foyer** F' situé en avant de la lentille (voir figure suivante).



La distance entre le centre de la lentille et le foyer est la **distance focale** f . Par convention, f est définie comme positive pour les lentilles convergentes et négative pour les lentilles divergentes. Les lentilles ont un second foyer. Si un objet est placé au point F , à une distance f du centre d'une lentille convergente, les rayons lumineux qu'il émet vers la lentille émergeront parallèlement à l'axe de celle-ci. De même, les rayons lumineux qui se dirigent vers un point F situé à une distance f en arrière d'une lentille divergente émergeront aussi parallèlement à l'axe optique (voir figures précédentes).

La puissance d'une lentille est déterminée par sa distance focale. Une lentille de courte distance focale est plus puissante et dévie plus fortement les rayons lumineux qu'une lentille de grande distance focale.

La distance focale dépend d'une part des indices de réfraction du milieu extérieur et de la lentille, et d'autre part de sa forme ou, plus précisément, des **rayons de courbure** de ses faces. Les surfaces des lentilles peuvent être **convexes**, **concaves** ou **planes**. Par définition, une surface est dite convexe si elle est bombée vers l'extérieur de la lentille. Elle est dite concave si elle est bombée vers l'intérieur. Nous utiliserons la convention suivante pour caractériser les surfaces des lentilles :



La distance focale d'une lentille est liée à son indice de réfraction n et aux rayons de courbure R_1 et R_2 de ses surfaces par une formule qui peut être établie à partir de la loi de Snell et qui reste valable tant que les angles d'incidence sont petits. L'établissement de cette relation ne sera pas détaillé ici. La distance focale d'une lentille d'indice n dans un milieu d'indice de réfraction 1 est donnée par la formule dite des opticiens.

Formule des opticiens

La formule des lentilles minces suppose que la lentille est utilisée dans un milieu dont l'indice de réfraction est 1. Si la lentille n'est pas utilisée dans l'air ou le vide, le symbole n apparaissant dans l'équation précédente doit être interprété comme l'**indice de réfraction relatif** :

$$n_{\text{relatif}} = \frac{n_{\text{lentille}}}{n_{\text{milieu}}}$$

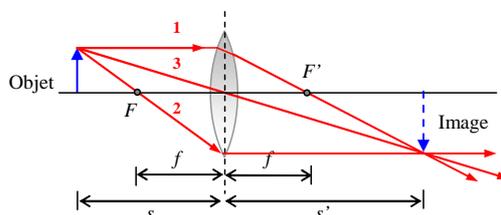
Remarque

A titre d'exemple, la distance focale sera plus grande dans l'eau que dans l'air. Cet accroissement de la distance focale d'une lentille plongée dans l'eau explique pourquoi notre vision sous l'eau est aussi mauvaise. Nos yeux contiennent des fluides dont les indices de réfraction sont proches de celui de l'eau. La lumière est principalement réfractée au niveau de la **cornée**, au moment où elle pénètre à l'intérieur de l'œil. Dans l'eau, la déviation est très faible et l'œil produit une image très mal focalisée. Lorsqu'un plongeur porte un masque, la lumière traverse la vitre sous une incidence presque normale et se trouve peu déviée en pénétrant dans l'air. La lumière est alors déviée de la manière habituelle en pénétrant dans l'œil à partir de l'air et la vision est pratiquement normale.

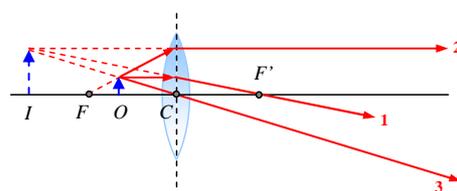
3 FORMATION DES IMAGES

Les rayons lumineux émis par une source ponctuelle située à grande distance d'une lentille se rencontrent et forment une image au foyer de celle-ci. Les rayons issus d'autres points forment des images dont le position peut être déterminée par une méthode graphique ou par l'algèbre si la distance focale de la lentille est connue.

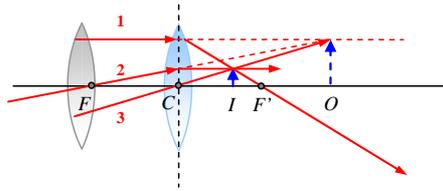
Les images peuvent être **réelles** ou **virtuelles**. Une image réelle se forme au point de rencontre de rayons lumineux réels et constitue un point de forte concentration d'énergie lumineuse. Une telle image peut être recueillie sur un écran (voir figure suivante).



Dans le cas d'une image virtuelle, les rayons émergents semblent provenir du point où elle se forme. Si nous plaçons un écran à cet endroit, il ne s'y formera évidemment aucune image (voir figure suivante).



Dans la plupart des cas, les objets sont réels, la lumière diverge à partir de chacun des points de l'objet. Des objets virtuels doivent parfois être considérés dans le cas de systèmes de lentilles, lorsque les rayons rendus convergents par une première lentille sont interceptés par une seconde lentille avant qu'ils ne se rencontrent.

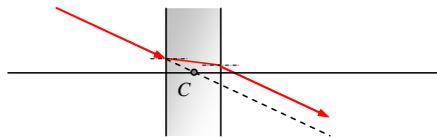


Pour le tracé des rayons lumineux en vue de déterminer la position de l'image d'un point, nous nous conformerons aux conventions suivantes :

1. Le rayon issu de la source et se propageant parallèlement à l'axe de la lentille est dévié de telle sorte qu'il passe par le foyer F' , accord avec la définition du foyer.
2. Le rayon qui passe par le foyer émerge parallèlement à l'axe optique de la lentille.
3. Le rayon qui passe par le centre de la lentille ne subit aucune déviation. Ceci provient de ce qu'aux environs du centre, la lentille peut être assimilée à une lame à faces parallèles (voir remarque et figure suivantes). Comme la lentille est mince, le rayon ne subit qu'un décalage négligeable par rapport à sa trajectoire initiale.

Remarque

Un rayon passant par une lame plane à faces parallèles est déplacé parallèlement à lui-même et ne change pas de direction. De la même façon, un rayon passant par le centre d'une lentille ne change pas de direction.

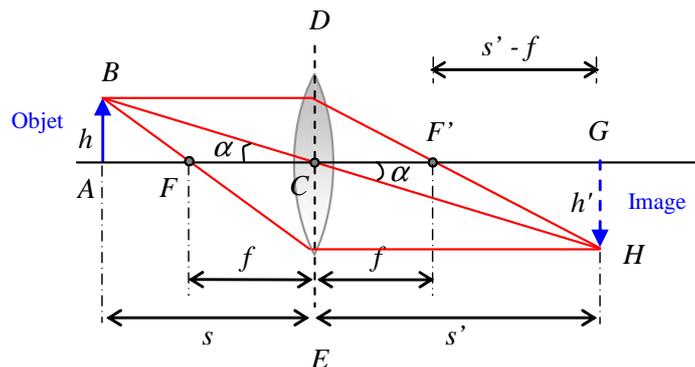


Les points situés au-dessous de la pointe de la flèche à la même distance s de la lentille donnent des images qui sont toutes situées à la même distance s' . Ainsi, dès que la position de l'image de la pointe a été déterminée, nous pouvons dessiner l'image de la flèche entière.

Le tracé des rayons est décrit dans les figures précédentes pour des situations où entrent en jeu des images ou des objets virtuels. Dans ces cas, les rayons passant par F et F' et le centre de la lentille sont tracés et leur intersection localisée.

Bien que le tracé des rayons nous apporte une intuition immédiate de la manière dont se forment les images par une lentille ou un système de lentilles, il est préférable, pour l'évaluation précise de la position des images, d'utiliser des expressions algébriques. Pour développer et appliquer ces formules, nous adopterons les conventions suivantes pour les quantités décrites sur la figure suivante :

1. s est positif pour un objet réel et négatif pour un objet virtuel.
2. s' est positif pour une image réelle et négatif pour une image virtuelle.
3. La **hauteur de l'objet** h est positive si le point est au-dessus de l'axe de la lentille et négative si le point est en dessous.
4. La **hauteur de l'image** h' est positive si celle-ci est au-dessus de l'axe de la lentille et négative si elle est en dessous.



Le **facteur d'agrandissement linéaire** ou **grandissement linéaire** est noté m . Il représente le rapport de la hauteur de l'image à celle de l'objet. Il est négatif lorsque l'image est renversée par rapport à l'objet. Il est positif lorsque l'image est droite et non renversée.



Nous pouvons découvrir les relations qui lient les quantités s , s' , f et m en utilisant les propriétés des triangles semblables. Deux triangles sont semblables et leurs côtés correspondants sont proportionnels lorsqu'ils ont deux de leurs angles égaux. Sur la figure précédente, les triangles rectangles ACB et GCH ont un angle aigu égal et sont donc semblables. Dans ce cas, on a :

$$\left| \frac{h'}{h} \right| = \left| \frac{s'}{s} \right|$$

En utilisant les conventions données précédemment, h' est négatif sur la figure précédente, de sorte que le **facteur d'agrandissement linéaire** m peut s'écrire :

$$m = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s}$$

De plus, les triangles CDF' et GHF' sont semblables, de sorte qu'on peut aussi écrire :

$$m = \frac{h'}{h} = -\left(\frac{s'-f}{f} \right)$$

En comparant ces équations, nous trouvons :

$$\frac{s'}{s} = \frac{s'-f}{f}$$

Si nous divisons cette relation par s' et que nous réarrangeons quelque peu les différents termes, nous obtenons la formule des lentilles minces.

Formule des lentilles minces

Nous pouvons aisément nous assurer que cette équation fournira les mêmes résultats que ceux qui ont été obtenus par la méthode graphique. Pour un objet très distant, s est infini et $1/s$ s'annule, de sorte que la formule des lentilles minces donne $1/s' = 1/f$ ou $s' = f$. On remarquera que pour une distance focale donnée, la distance à l'image s' ne dépend que de la distance à l'objet s , et ne dépend pas de la hauteur h de l'objet. **Ceci veut dire que tous les objets ponctuels situés à une distance s de la lentille ont leur image dans un même plan.**

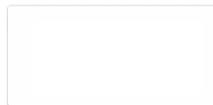
4 PUISSANCE DES LENTILLES ET ABERRATIONS

Pour la discussion des propriétés des lentilles, il est parfois plus commode d'exprimer la convergence en termes de l'inverse de la distance focale, c'est-à-dire la **puissance** de la lentille :

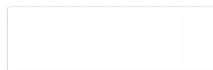


Le mot *puissance* en optique n'a rien de commun avec celui qui intervient dans le contexte de la mécanique où la puissance exprime un travail effectué par unité de temps. Si la distance focale f est mesurée en mètres, la puissance P s'exprime en **dioptries** : 1 dioptrie = 1 m^{-1} . Par exemple, une lentille dont la distance focale est $-0,4 \text{ m}$ a une puissance $P = 1/(-0,4 \text{ m}) = -2,5$ dioptries. Une lentille de courte distance focale, qui réfracte fortement la lumière, est une lentille de forte puissance.

Il est possible de démontrer que deux lentilles minces accolées, de distances focales f_1 et f_2 , sont équivalentes à une seule lentille dont la distance focale f vérifie :



Cette relation est équivalente à la suivante qui fait intervenir les puissances $P_1 = 1/f_1$ et $P_2 = 1/f_2$. La puissance de l'ensemble des deux lentilles accolées est donnée par :

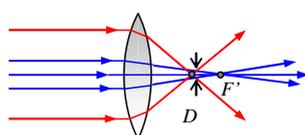


Les puissances des deux lentilles accolées s'ajoutent pour donner la puissance totale de l'ensemble. De ce fait, l'usage du concept de puissance permet d'éviter une manipulation parfois fastidieuse de nombres fractionnaires. Par exemple, un ophtalmologiste sait que s'il place une lentille de 3 dioptries et une lentille de 0,25 dioptrie devant les yeux d'un patient, l'assemblage est équivalent à une lentille de 3,25 dioptries.

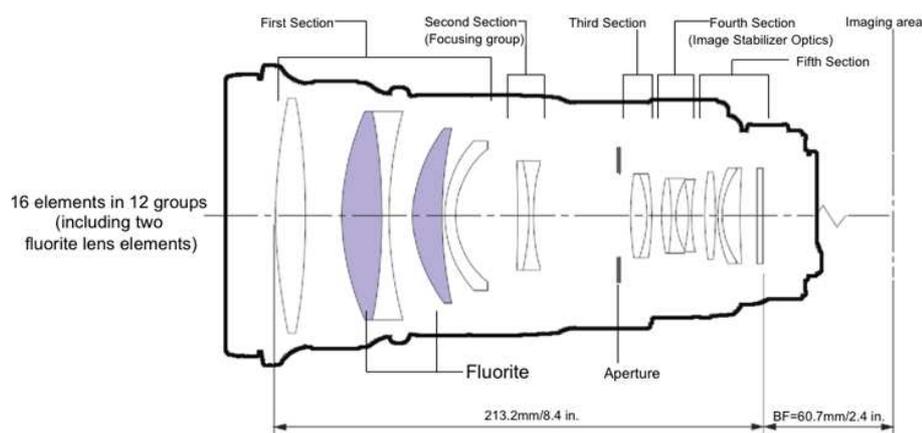
▪ Aberrations optiques des lentilles

Quelle que soit la perfection de la taille des lentilles, celles-ci présentent toujours certains défauts ou **aberrations** qui limitent la netteté des images indépendamment des effets de diffraction. Comme l'indice de réfraction varie avec la longueur d'onde de la lumière, la distance focale d'une lentille varie également avec celle-ci. Lorsqu'un objet est éclairé en lumière blanche et que son image est au point pour une composante de couleur particulière, elle ne peut pas être parfaitement nette pour les autres composantes. On appelle ce défaut **l'aberration chromatique**.

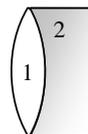
Par ailleurs, la relation liant la distance focale aux caractéristiques de la lentille (voir la formule des opticiens décrite plus haut) n'est précise que dans le cas où les rayons forment avec la direction de l'axe optique des angles suffisamment petits. Si des corrections sont apportées à cette relation, on constate que les rayons parallèles à l'axe forment des images dont la position dépend de leur distance à celui-ci. De ce fait, un faisceau de rayons parallèles forme une image de dimensions finies et ne se réduit pas à un point (voir figure ci-dessous). Les aberrations de ce type sont des **aberrations monochromatiques**.



Pour réduire ces aberrations, on est amené à remplacer une lentille par un système comportant de nombreux éléments, dont les aberrations individuelles tendent à se compenser dans l'ensemble (voir figure suivante, objectif multiélément utilisé sur un microscope moderne).



Nous pouvons illustrer ce procédé en considérant un **doublet** c'est-à-dire un ensemble de deux lentilles en contact (voir figure suivante). La lentille 1 présente deux surfaces convexes et est constituée de verre « crown ». La lentille 2 présente une surface plane et une surface concave, elle est taillée dans du verre « flint ».



	656 nm Rouge	589 nm Jaune	486 nm Bleu
Indices de réfraction			
Verre « crown »	1,517	1,520	1,527
Verre « flint »	1,644	1,650	1,664
Puissances			
P_1 (crown)	10,34	10,40	10,54
P_2 (flint)	-6,44	-6,50	-6,64
$P = P_1 + P_2$	3,90	3,90	3,90

Toutes les surfaces sphériques ont un rayon de courbure de 10 cm. Dans les deux types de verre, l'indice de réfraction varie de 1% d'une extrémité à l'autre du spectre visible. Les puissances P_1 et P_2 peuvent être évaluées à partir de l'équation :

$$P = \frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Comme le montre la figure précédente, P_1 varie de 2% sur tout le spectre et P_2 de 3%. Toutefois, lorsque les deux lentilles sont mises en contact, $P = P_1 + P_2$ est constant ! Le doublet ne présente plus aucune aberration chromatique.

5 GENERALITES ET PRINCIPE DE QUELQUES INSTRUMENTS D'OPTIQUE CLASSIQUES

On distingue deux grandes familles d'instruments d'optique. Les **instruments oculaires** donnent d'un objet une image virtuelle observée par l'œil. Parmi ces instruments, on distingue la loupe, le microscope et la lunette. Si l'objet est situé à l'infini, l'instrument est du genre télescope. Les **instruments objectifs** ou **de projection** donnent d'un objet une image réelle recueillie sur un écran ou un film photographique.

▪ Caractéristiques d'un instrument d'optique

Les qualités d'un instrument d'optique sont caractérisées par :

- la grandeur de l'image par rapport à celle de l'objet,
- le champ qui définit la distance angulaire entre les deux points les plus voisins de l'objet dont l'instrument donne deux images distinctes,
- la clarté qui rend compte du rendement photométrique de l'instrument.

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement à la grandeur de l'image donnée par l'instrument. Suivant le type de l'instrument, elle sera définie soit par la puissance (objet proche) ou le grossissement (objet éloigné) pour les instruments oculaires, soit par le grandissement linéaire pour les instruments objectifs.

▪ Instrument oculaire

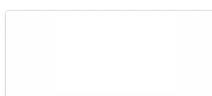
Un tel instrument donne d'un objet réel AB à distance finie ou à l'infini, une image virtuelle $A'B'$ observée par l'œil. Dans ce cas, la grandeur de l'image est caractérisée par le diamètre apparent α' sous lequel l'observateur la voit.

Pour un **objet proche**, l'instrument est caractérisé par le rapport suivant que l'on définit comme étant la **puissance de l'instrument** :



L'angle α' est exprimé en radians et AB est exprimé en mètres. Dans ces conditions, la puissance s'exprime en **dioptries**. La puissance est dite intrinsèque lorsqu'elle ne dépend pas de l'observateur. Dans ce cas, soit le centre optique de l'œil est au foyer image de l'instrument, soit l'œil est normal et n'accommode pas, ce qui veut dire que l'image $A'B'$ est à l'infini.

Pour un **objet éloigné** ou **à l'infini**, l'objet est caractérisé par le diamètre apparent α sous lequel il est vu à l'œil nu. On définira alors la grandeur de l'image par la quantité suivante que l'on appelle le **grossissement de l'appareil** :



▪ Instrument objectif

Dans le cas d'un instrument objectif, l'image $A'B'$ est réelle et lorsque l'objet est proche, la grandeur significative est le **grandissement linéaire** :

Si l'objet est à l'infini, il est défini par son diamètre apparent α et la grandeur qui caractérise l'instrument est sa **distance focale objet** :

6 APPLICATION : LA LOUPE

La loupe est un instrument oculaire destiné à donner d'un objet proche une image virtuelle agrandie. Elle permet également d'augmenter le pouvoir séparateur de l'œil. Elle est généralement constituée d'une lentille convergente mince ou épaisse.



▪ Marche des rayons

L'œil est situé près du foyer image de la loupe. S'il est normal, l'objet est situé dans le plan focal objet et l'œil observe l'image à l'infini sans accommodation. Si l'œil n'est pas emmétrope^⑤, l'observateur a intérêt à ne pas accommoder pour éviter la fatigue. Il faut donc placer l'objet en un point tel que son image se forme au *punctum remotum*^⑥.

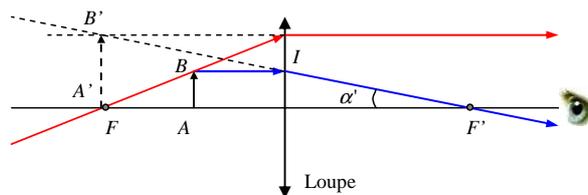
▪ Puissance

Dans le cas où l'œil est au foyer image (voir figure ci-dessous), la puissance est indépendante de l'œil et on a :

C'est la **vergence** de la loupe. La distance focale d'une loupe varie entre 1 et 10 cm. La puissance varie donc entre 100 et 10 dioptries.

^⑤ Du grec *emmetros* (« qui mesure bien »). L'œil *emmétrope* est défini par une configuration optique telle qu'à l'état de repos, l'image d'un objet éloigné se forme directement sur la rétine.

^⑥ Le *punctum remotum* est le conjugué de la rétine à travers l'œil quand celui n'accorde pas. C'est-à-dire que c'est le point le plus éloigné que puisse voir l'œil sans mettre en jeu son accommodation. La distance entre le *punctum remotum* et le *punctum proximum* nous permet de connaître l'accommodation maximale d'un sujet.

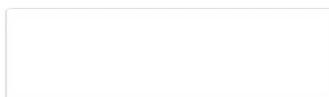


▪ Grossissement

Le diamètre apparent de l'objet est l'angle α sous lequel celui-ci est observé à l'œil nu. Les meilleures conditions d'observation sont réalisées lorsque l'objet est situé à la distance minimum de vision distincte donc au *punctum proximum*^⑦. On pose alors :

$$\alpha = \frac{AB}{d}$$

et :



Pour pouvoir comparer les loupes entre elles sans tenir compte de l'observateur, on fixe arbitrairement pour d la valeur de 25 cm. Le grossissement commercial varie donc entre 2,5 et 25.

7 APPLICATION : LE MICROSCOPE

Le microscope, comme la loupe, sert à examiner de petits objets. Cependant, le grossissement obtenu est bien supérieur à celui de la loupe.



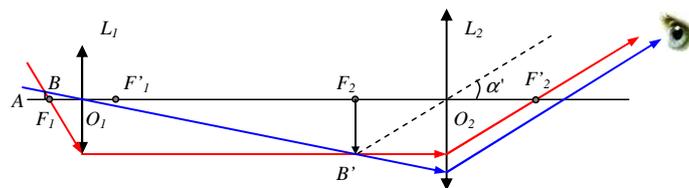
▪ Schéma élémentaire d'un microscope

Le microscope est constitué schématiquement de deux lentilles L_1 (objectif) et L_2 (oculaire) représentées sur la figure suivante. La lentille L_1 donne de l'objet AB une image réelle $A'B'$ située dans le plan focal objet de l'oculaire L_2 . Ce dernier, qui sert de loupe, en donne une image à l'infini. En fait, ni l'objectif ni l'oculaire ne sont des lentilles simples ; ils sont chacun composés d'un grand nombre de lentilles pour corriger au mieux les aberrations.

^⑦ Le *Punctum proximum* est le point le plus proche que l'on peut voir distinctement. Il en existe deux types :

- Le *punctum proximum de convergence*. C'est le point le plus proche pour voir simple l'image des deux yeux. Ce point existe en présence d'une vision binoculaire efficace.
- Le *punctum proximum d'accommodation*. C'est le point le plus proche qu'un œil peut voir nettement, en accommodant au maximum. Avec l'âge, ce point s'éloigne progressivement de l'œil, c'est la presbytie.

En vision binoculaire, le *punctum proximum* est donc le conjugué de chaque rétine d'un couple oculaire, quand les cristallins accommodent au maximum.



▪ **Puissance et grossissement d'un microscope**

La distance entre l'objectif et l'oculaire est caractérisée par l'**intervalle optique** suivant qui est une constante de l'appareil :

$$\Delta = \overline{F'_1 F_2}$$

Par définition :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{\alpha'}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{AB} = |\gamma_{\text{objectif}}| \cdot P_{\text{oculaire}}$$

La puissance du microscope est égale au produit de la valeur absolue du grossissement linéaire de l'objectif par la puissance de l'oculaire. On peut également écrire dans le cas de l'approximation de Gauss que :

$$\alpha' = \frac{A'B'}{f'_2}$$

Or, en admettant que la distance focale de l'objectif est négligeable devant l'intervalle optique, on a :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\overline{O_1 F_2}}{\overline{O_1 A}} \approx \frac{\overline{F'_1 F_2}}{\overline{O_1 F_1}}$$

Donc :

$$\alpha' = \frac{\Delta}{f'_1 \cdot f'_2} \cdot AB$$

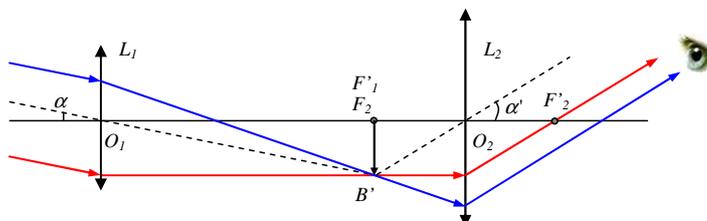
Et :

Le grossissement commercial du microscope est, par définition, le produit de la puissance exprimée en dioptries par la distance minimale de vision distincte fixée à 0,25 m soit :

Pour un microscope optique, P varie entre 100 et 10 000 dioptries et le grossissement varie entre 25 et 2 500. Les objectifs usuels sont caractérisés par des grossissements linéaires variant entre 5 et 200 et les oculaires, par des grossissements variant de 5 à 30.

8 APPLICATION : LA LUNETTE ASTRONOMIQUE

La lunette astronomique sert à l'observation des astres, qui sont des objets pratiquement situés à l'infini (voir figure suivante). Elle est constituée d'un objectif convergent L_1 de grande distance focale (plusieurs mètres) assimilable à une lentille mince et d'un oculaire classique L_2 dont le foyer objet coïncide avec le foyer image de l'objectif.



L'objectif L_1 donne de l'objet AB à l'infini et de diamètre apparent α une image $A'B'$ située dans son plan focal image et dont la dimension linéaire est :

$$A'B' = f'_1 \cdot \alpha$$

Cette image est située dans le plan focal objet de l'oculaire qui en donne, à son tour, une image à l'infini dont le diamètre apparent pour l'œil est :

$$\alpha' = \frac{A'B'}{f'_2} \approx \alpha \cdot \frac{f'_1}{f'_2}$$

La lunette est caractérisée par le grossissement :

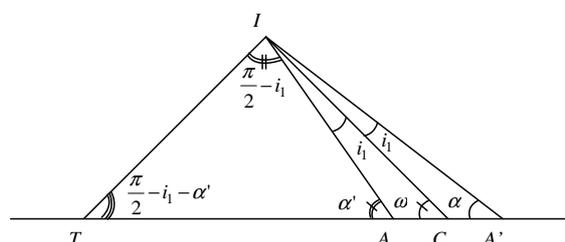


L'oculaire doit avoir une courte distance focale (de l'ordre de quelques centimètres) pour que le grossissement soit important. La lunette astronomique donne des objets une image renversée, ce qui n'a pas beaucoup d'importance dans le cas de l'observation des astres. Une longue-vue ne pourrait fonctionner sur ce principe et c'est pourquoi l'oculaire est une lentille divergente, comme dans le cas des jumelles de théâtre. Notons enfin qu'un télescope fonctionne comme une lunette mais l'objectif est remplacé par un miroir.

Annexe

1 RAPPELS SUR LA DIVISION HARMONIQUE

Soit l'ensemble des quatre demi-droites IT , IA , IC et IA' telles que IC soit la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AIA'} = 2 \cdot i_1$ (voir figure suivante) et IT soit la bissectrice extérieure du même angle (IT est perpendiculaire à IC).



En considérant les triangles ICA et ICA' , on a :

$$\frac{CA}{\sin i_1} = \frac{IC}{\sin(i_1 + \omega)} = \frac{IA}{\sin \omega}$$

et

$$\frac{CA'}{\sin i_1} = \frac{IC}{\sin \alpha} = \frac{IA'}{\sin \omega}$$

avec

$$\omega = i_1 + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha' = i_1 + \omega$$

Il s'ensuit que

$$\frac{IA}{CA} = \frac{IA'}{CA'} = \frac{\sin \omega}{\sin i_1} \quad (1)$$

De même, en considérant les triangles ITA et ITA' , on a :

$$\frac{TA'}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right)} = \frac{IA}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i_1 - \alpha'\right)} = \frac{IT}{\sin \alpha'} \quad \text{et} \quad \frac{TA'}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i_1\right)} = \frac{IA'}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i_1 - \alpha'\right)} = \frac{IT}{\sin \alpha}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{TA}{IA} = \frac{\cos i_1}{\cos(i_1 - \alpha')} = \frac{TA'}{IA'} \quad (2)$$

En utilisant les relations (1) et (2) précédentes, on obtient finalement :

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{CA'}{CA} = \frac{TA'}{TA}$$

Le faisceau des quatre droites IT , IA , IC et IA' est un faisceau harmonique et les quatre points T , A , C et A' forment ce que l'on appelle une **division harmonique**, caractérisée par la relation classique sur les mesures algébriques :

$$\frac{\overline{TA'}}{\overline{TA}} = -\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

On peut encore écrire :

$$\frac{\overline{TA'}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{TC} + \overline{CA'}}{\overline{TC} + \overline{CA}} = \frac{1 - \frac{\overline{CA'}}{\overline{CT}}}{1 - \frac{\overline{CA}}{\overline{CT}}} = -\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

Et par suite :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CT}}$$

On peut également écrire :

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{CA} + \overline{TA'}}{\overline{CT} + \overline{TA}} = \frac{\overline{TC} - \overline{TA'}}{\overline{TC} - \overline{TA}} = \frac{1 - \frac{\overline{TA'}}{\overline{TC}}}{1 - \frac{\overline{TA}}{\overline{TC}}} = -\frac{\overline{TA'}}{\overline{TA}}$$

Il en résulte que

$$1 - \frac{\overline{TA'}}{\overline{TC}} = -\frac{\overline{TA'}}{\overline{TA}} + \frac{\overline{TA'}}{\overline{TC}}$$

Ou encore que

$$\frac{1}{\overline{TA'}} + \frac{1}{\overline{TA}} = \frac{2}{\overline{TC}}$$